Priprava na teoretični izpit iz Hidromehanike

Robin Kleindienst

29. 01. 2025

Dokument povzema avtorsko zaščiteno vsebino predavanj doc. dr. Gorazda Novaka, pri čemer avtor dokumenta ne zadržuje nobenih pravic. Vsebina je brez jamstva točnosti ali pravilnosti. Avtor ne prevzema nobenih odgovornosti za morebitne napake ali posledice uporabe te vsebine.

Contents

1 Teme izpitnih vprašanj **4**

1.1 Področja hidromehanike: katera so in kratek opis 4
1.2 Arhimedov zakon vzgona (opisno) 4
1.3 Hidrostatični tlak: osnovne značilnosti in obtežbeno telo 4
1.4 Sila hidrostatičnega tlaka (izpeljava: 2.1) 6
1.5 Prijemališče sile hidrostatičnega tlaka (izpeljava:2.2) 6
1.6 Metacentrična razdalja 7
1.7 Newtonov zakon viskoznosti 8
1.8 Razdelitev tekočin 8
1.8.1 Razdelitev glede na stisljivost 8
1.8.2 Razdelitev glede na vizkoznost in stisljivost 9
1.9 Reološki diagrami 9
1.10 Osnovne enačbe: pregled, princip reševanja hidrotehničnih problemov 9
1.10.1 Pregled spremenljivk 9
1.10.2 Pregled enačb 10
1.10.3 Princip reševanja hidromehanskih problemov 10
1.11 Kontinuitetna enačba (izpeljava: 2.4) 11
1.12 Dinamična enačba (izpeljava: 2.5) 11
1.13 Lastnosti tokovnic 12
1.14 Cauchy-Riemann 12
1.15 Tokovne mreže: lastnosti in metode določanja 12
1.15.1 Lastnosti tokovnih mrež 12
1.15.2 Metode za določanje tokovnih mrež (samo naštej) 13
1.16 Spreminjanje cirkulacije 14
1.17 3. Helmholtzov zakon 14
1.18 Primeri (ne)vrtinčnega toka 14
1.19 Bernoullijeva in energijska enačba: vse predpostavke, ne vseh izpeljav 15
1.20 Merjenje pretoka 16
1.21 Kavitacija 17
1.22 Darcy-jev zakon za tok podtalnice v poroznem materialu 17
1.23 Primeri toka podtalnice 18
1.24 Tok pod pregrado 19
1.25 Teorem o gibalni količini: osnovni pojmi 19
1.26 Turbulentni tok: značilnosti 20
1.27 Fr in Re število 21
1.28 Modeli turbulence: samo opisno 21
1.29 Mejna plast 21
1.30 Odlepljanje tokovnic 22
1.31 Sila upora pri obtekanju potopljenih objektov 22
1.32 Problematika mostnih opornikov (zagozdeno plavje in erozija) . . 22
1.33 Modelna podobnost 22
1.34 Fizični hidravlični modeli 23
1.35 Postopek numeričnega modeliranja 23

2 Izpeljave **24**
2.1 Velikost sile hidrostatičnega tlaka na ravno ploskev 24
2.2 Prijemališče sile tlaka na ravno ploskev 25
2.3 Osnovna enačba hidrostatike 26
2.4 Kontinuitetna enačba 27
2.5 Dinamična enačba (Navier-Stokes) 28

1 Teme izpitnih vprašanj

1.1 Področja hidromehanike: katera so in kratek opis

Hidromehanika = hidrostatika (stoječe tekočine) + hidrodinamika (tok).

Strojništvo: vodne turbine, vetrne turbine, optimizacija plovil in letal.

Gradbeništvo: hidroelektrarne (pregrade, zapornice, akumulacije, protipoplavna zaščita (mokri in suhi zadrževalniki, visokovodni nasipi, urejanje vodotokov (prepusti, pragovi, utrjene brežine, razne pregrade), oskrba z vodo - vodovod, kanalizacija (mešani in ločeni sistem), čistilne naprave, obalno inženirstvo (valobrani, zaščita obale, prekopi), eko-hidravlika (ribje steze, renaturacija vodotokov).

1.2 Arhimedov zakon vzgona (opisno)

Arhimedov zakon: na potopljeno telo deluje sila vzgona, ki kaže navzgor, po velikosti pa je enaka teži tekočine, ki jo potopljeno telo izpodrine. Vzgon ni neka dodatna sila, temveč rezultanta tlakov.

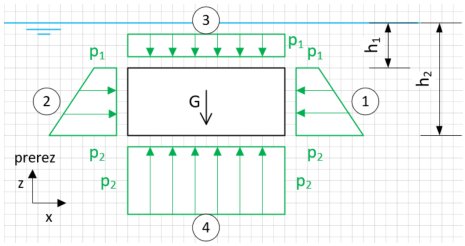

Figure 1: hidrostatični tlak na potopljen kvader

1. Desna in leva ploskev sta obteženi z nasprotno enakim hidrostatičnim tlakom, ki z globino narašča. Se izničita.

2. Hidrostatični tlak na zgornjo ploskev je enak $p_1 = \rho g h_1$, saj je ploskev na globini h_1 in pritiska navzdol (pravokotno na omočeno ploskev).

3. Hidrostatični tlak na spodnjo ploskev je enak $p_2 = \rho g h_2$, saj je ploskev na globini h_2 in pritiska navgor (pravokotno na omočeno ploskev).

4. Razlika tlakov p_1 in p_2 kaže navzgor in znaša $p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$. Razlika $(h_2 - h_1)$je ravno višina kvadra.

5. Višina kvadra $(h_2 - h_1)$, pomnožena s ploskvijo S, je ravno volumen kvadra. Tako smo prišli do rezultata:

$$F_{vzgon} = \rho_{tekočina} \cdot g \cdot V_{potopljeni\ del\ telesa}$$

1.3 Hidrostatični tlak: osnovne značilnosti in obtežbeno telo

Osnovna enačba hidrostatike (izpeljava: 2.3):

$$p_A = p_0 + \rho g h$$

Značilnosti:

- iz enačbe $p = \rho g h$ je razvidno, da se tlak spreminja samo z oddaljenostjo od gladine, saj sta ρ in g konstanti. Na gladini je hidrostatični tlak enak nič. Z globino linearno narašča;
- hidrostatični tlak vedno deluje od tekočine proti objektu, pravokotno na omočeno ploskev;
- hidrostatični paradoks: mirujoče tekočine v različnih posodah enako površino dna A, delujejo na dno z enako silo $F = p \cdot A$, ker je v vseh posodah enaka globina vode h. Oblika posode nima vloge;
- Pascalov zakon: če sila F deluje na mirujočo tekočino brez proste gladine, v njej povzroči tlak p, ki v vsaki točki deluje v vseh smereh enako;

Primeri obtežbenih teles:

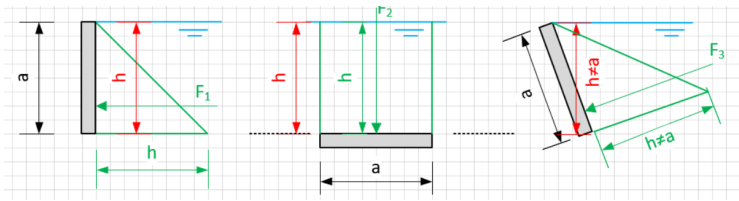

Figure 2: 2D značilni primeri

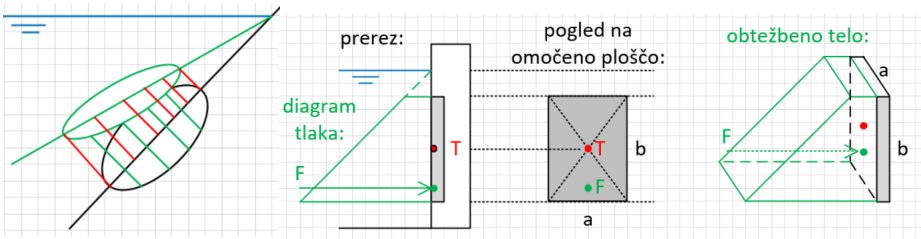

Figure 3: 3D primera: krog na brežini (levo) in navpična ploskev (desno)

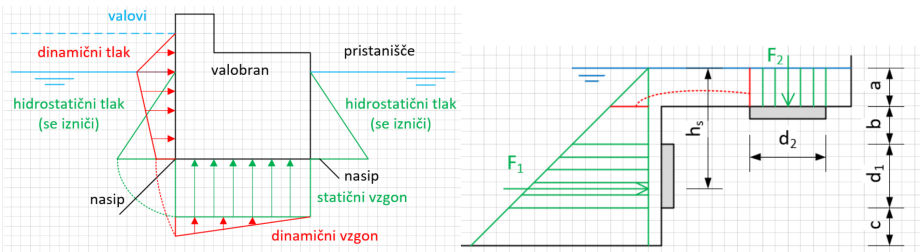

Figure 4: obtežbeno telo valobrana (levo) in obtežbeno telo pokrovov potopljene konstrukcije (desno)

1.4 Sila hidrostatičnega tlaka (izpeljava: 2.1)

Enačba $F = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S$, pri čemer je h_T težišče plošče, velja za navpične in poševne ploskve. Višina težišča h_T se vedno meri v navpični smeri.

1.5 Prijemališče sile hidrostatičnega tlaka (izpeljava:2.2)

$$h'_S = \frac{J_T}{h'_T \cdot S} + h'_T$$

↑ enačba za prijemališče sile F na <u>poševno</u> ploskev: h'_S je poševna razdalja od gladine po ravnini ploskve do prijemališča sile F.

$$h_S = \frac{J_T}{h'_T \cdot S} + h_T$$

↑ enačba za prijemališče sile F na <u>navpično</u> ploskev: h_s je navpična razdalja od gladine do prijemališča sile F.

Določanje velikosti in prijemališča sile tlaka na ravno ploskev s pomočjo razcepa na komponenti

F_H deluje na vertikalno projekcijo obravnavane ploskve, F_V pa je rezultanta vodnega telesa V_V, ki ga predpostavimo nad obravnavano ploskvijo.

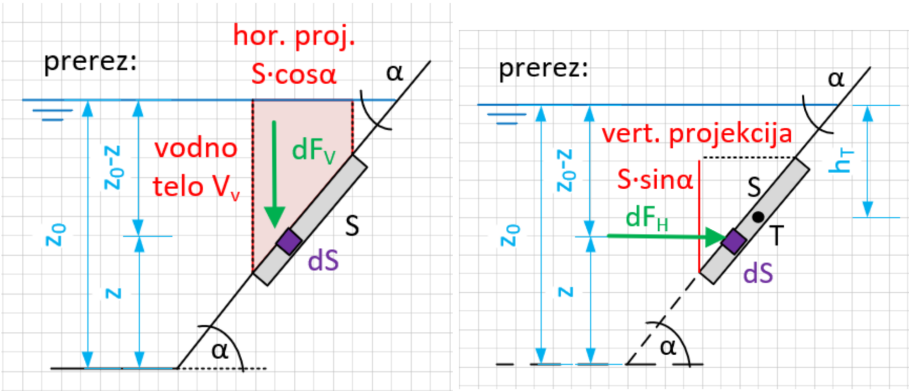

Figure 5: razcep na komponenti

$$\begin{aligned}
dF &= p \cdot dS \\
dF_H &= \rho g (z_0 - z)(dS \cdot \sin\alpha) \\
F_H &= \int \rho g (z_0 - z)(dS \cdot \sin\alpha) \\
F_H &= \rho g \cdot \sin\alpha \int (z_0 - z) dS \qquad /h_T = \frac{1}{S}\int h dS \\
F_H &= \rho g \cdot h_T \cdot S_{proj}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
dF &= p \cdot dS \\
dF_V &= \rho g(z_0 - z)(dS \cdot \cos\alpha) \\
F_V &= \int \rho g(z_0 - z)(dS \cos\alpha) \\
F_V &= \rho g \cdot \cos\alpha \int (z_0 - z) dS \qquad\qquad /h_T = \frac{1}{S}\int h dS \\
F_V &= \rho g \cdot \cos\alpha \cdot h_T \cdot S \\
F_V &= \rho g \cdot h_T \cdot S \cdot \cos\alpha \\
F_V &= \rho \cdot g \cdot V_V
\end{aligned}
$$

- $h_S = h_{T,\ proj} + \frac{J_{proj}}{h_{T,\ proj} \cdot S_{proj}}$ (prijemališče F_V)
- F_V prijemlje v težišču vodnega telesa V_V

1.6 Metacentrična razdalja

Glede na odziv telesa ob nesimetrični obremenitvi je plavanje lahko:

- stabilno: če telo nagnemo iz začetne lege, nastopi uravnalni moment, zaradi katerega se telo vrne v prvotni položaj;
- nestabilno (labilno): če telo nagnemo, nastopi moment, ki deluje v smer nagiba, zaradi česar se telo prevrne v novo lego in ostane v njej in
- indiferentno: telo ostane v kakršnikoli legi, v katero ga postavimo.

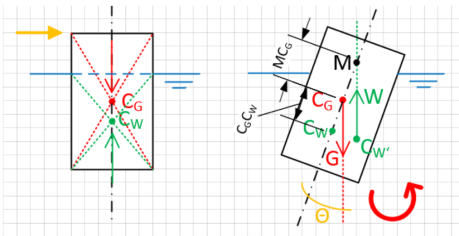

Figure 6: metacenter in metacentrična razdalja

Metacenter M je presečišče osi telesa in nosilke vzgona nagnjenega telesa.
Metacentrična razdalja $\overline{MC_G}$ je mera za stabilnost plavanja:

- M leži nad C_G: stabilno plavanje,
- M leži pod C_G: nestabilno plavanje in
- M leži v C_G: indiferentno plavanje.

Uravnalni moment $M_{urav}^{C_{W'}} = G \cdot r_G = G \cdot \overline{MC_G} \cdot \sin\theta$

Nižja lega težišča $\rightarrow$ večja razdalja $\overline{MC_G}$ $\rightarrow$ večja ročica r_G $\rightarrow$ večji uravnalni moment $\rightarrow$ bolj stabilno plavanje.

Za majhen kot nagiba θ so nagnjene razdalje praktično enake navpičnim, zato lahko za metacentrično razdaljo zapišemo:

$$\overline{MC_G} = \overline{MC_W} - \overline{C_G C_W};$$
$$\overline{MC_W} = \frac{J_{plovna\ ploskev}}{V_{potopljeni\ del\ telesa}}$$

Plavanje je stabilno, če velja:

$$\overline{MC_W} > \overline{C_G C_W}$$

Kot nagiba θ zaradi delovanja sile F, ki deluje na razdalji d od težišča, določimo iz ravnotežja:

$$\sin\theta = \frac{F \cdot d}{G \cdot \overline{MC_G}}$$

1.7 Newtonov zakon viskoznosti

$$\boldsymbol{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$$

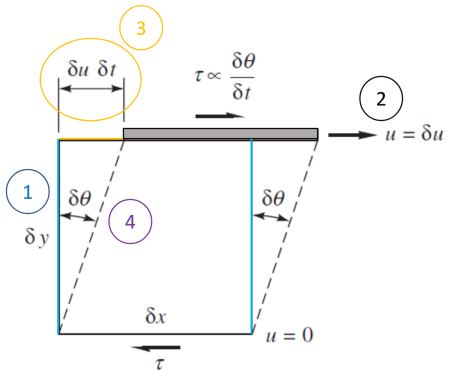

Figure 7: Newtonov zakon viskoznosti

Nastopajo majhne veličine δ:

1. tekočina miruje, na njej plava plošča S;
2. ploščo potisnemo s silo F, da se premika s hitrostjo δu zaradi striga $\tau = \frac{F}{S}$;
3. v času δt se plošča premakne (opravi pot) za $\delta u \cdot \delta t$;
4. ta premik je dolžina loka, kjer je kot $\delta\theta$, radij pa δy, (spomnimo: $l = \alpha \cdot r$) torej $\delta u \cdot \delta t = \delta\theta \cdot \delta y$;
5. preuredimo v zapis z odvodi: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy}$, pri čemer je desni člen <u>deformacijska hitrost</u>.

1.8 Razdelitev tekočin

1.8.1 Razdelitev glede na stisljivost

= spreminjanje ρ zaradi p in T

1. **plini:** manjša gostota, večja stisljivost in

2. **kapljevine:** večja gostota, manjša stisljivost.

- voda je praktično nestisljiva, tj. ima konstantno gostoto:

$$\rho = \frac{m}{V} = konst.[\frac{kg}{m^3}];$$

- stisljivost podamo s koeficientom χ ('hi'), ali modulom stisljivosti κ ('kapa');
- stisljivost se v splošnem spreminja v odvisnosti od p in T, a je pri kapljevinah skoraj konstantna in majhna. Plini so bolj stisljivi, a jih lahko obravnavamo kot nestisljive, dokler so njihove hitrosti bistveno manjše od hitrosti zvoka, ki znaša 330 m/s.

1.8.2 Razdelitev glede na vizkoznost in stisljivost

1. **idealne** (neviskozne) **stisljive:** $\mu = 0, \rho \neq konst.$ (plini pri veliki hitrosti);
2. **idealne** (neviskozne) **nestisljive:** $\mu = 0, \rho = konst.$ (kapljevine);
3. **realne** (viskozne) **newtonske:** $\mu \neq 0, \mu = konst.$ (voda, olje, glicerin) in
4. **realne** (viskozne) **ne-newtonske:** $\mu \neq 0, \mu \neq konst.$ (snežni plaz, kri, voda+škrob).

1.9 Reološki diagrami

Reologija = veda o mehanskih lastnostih snovi.

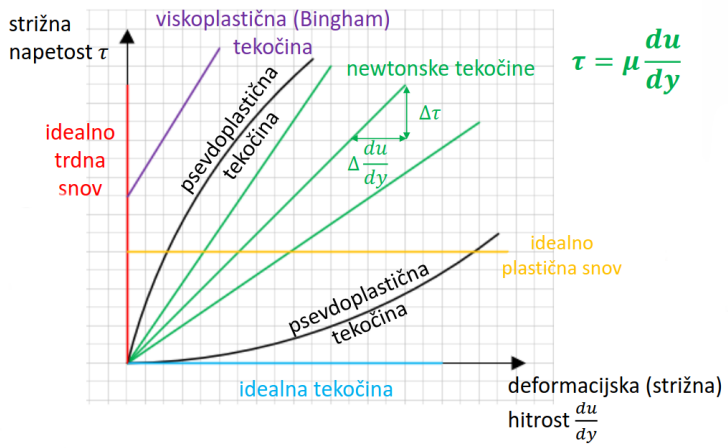

Figure 8: reološki diagram

1.10 Osnovne enačbe: pregled, princip reševanja hidrotehničnih problemov

1.10.1 Pregled spremenljivk

- u ... hitrost toka v smeri x [m/s]

- v ... hitrost toka v smeri y [m/s]
- w ... hitrost toka v smeri z [m/s]
- p ... tlak [Pa = N/m^3, 1 bar = 100 kPa]
- ρ ... gostota [kg/m^3]
- μ ... dinamična viskoznost [Pa·s = N·s/m^2]
- T ... temperatura [$^\circ$ C, K]

Vseh spremenljivk je 7, kar pomeni, da za njihovo določitev v splošnem potrebujemo sedem enačb.

1.10.2 Pregled enačb

- kontinuitetna enačba: zakon o ohranitvi mase;
- dinamična enačba: drugi Newtonov zakon ($F = m \cdot a$). Ker je enačba vektorska predstavlja tri skalarne enačbe, po eno za vsako smer;
- enačba stanja: zveza med gostoto, tlakom in temperaturo $f(\rho, p, T) = 0$. Pogosto se upošteva poenostavitev, da je tekočina nestisljiva: $\rho = konst.$;
- energijska enačba: zakon o ohranitvi energije $\Delta E = Q - A$. Sprememba celotne energije dE v sistemu je enaka dovedeni toploti Q, zmanjšani za delo A, ki ga sistem opravi;
- zveza med viskoznostjo in tlakom ter temperaturo $\mu = f(p, T)$. Običajno obravnavamo idealne tekočine ($\mu = 0$) ali newtonske tekočine ($\mu = konst.$) ter izotermne pojave ($T = konst.$).

1.10.3 Princip reševanja hidromehanskih problemov

Osnovne enačbe veljajo za splošno REALNO (viskozno) in STISLJIVO ($\rho \neq konst.$) tekočino v prostoru.

1. predpostavimo, kar je običajno izpolnjeno:
   - tekočina je newtonska $\rightarrow \mu = konst.$,
   - pojavi so izotermični $\rightarrow T = konst.$;
2. dani podatki:
   - geometrija ostenja ('dotikanje/drsenje ob steni/robu'),
   - diferencialne enačbe: kontinuitetna + 3 dinamične + enačba stanja,
   - konstantne lastnosti tekočine: μ, T, plinska konstanta R, ...,
   - začetni pogoji $\rightarrow$ stanje v času $t = 0$,
   - robni pogoji $\rightarrow$ pogoji na robovih domene (običajno na ostenju);
3. račun:
   - računamo numerično, pogosto iteracijsko $\rightarrow$ CFD,

- zanemarimo/poenostavimo, kar lahko:
  - tok je 1-D (samo u),
  - tok je 2-D (u in v),
  - tekočina je nestisljiva ($\rho = konst.$),
  - tekočina je idealna (neviskozna) $\mu = 0$,
  - tok je stalen $\rightarrow Q = konst. \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$, odpadejo časovni odvodi,
  - če tekočina miruje (hidrostatika)$\rightarrow \vec{v} = 0$,
  - v posebnih primerih lahko osnovne enačbe preoblikujemo:
    * dinamična $\rightarrow$ Bernoullijeva
    * kontinuitetna $\rightarrow$ enačba tokovnic

1.11 Kontinuitetna enačba (izpeljava: 2.4)

Osnovni pojmi:

- kontinuum = predpostavka, da je masa snovi porazdeljena enakomerno
- kontinuiteta = ohranitev $\rightarrow$ zakon o ohranitvi mase
- masa je podana z gostoto in volumnom:

$$m = \rho \cdot V \text{ oz. } \iiint \rho dV$$

- volumski pretok Q = razmerje volumna in časa:

$$Q = \frac{V}{t} = S \cdot v$$

- masni pretok = razmerje mase in časa:

$$\frac{\Delta m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \rho \cdot Q = \rho \cdot S \cdot v$$

- neto masni dotok = razlika med iztekajočim (+) in dotekajočim (-) pretokom
- kontrolni volumen = poljubni izbrani del prostora, ponavadi cev

1.12 Dinamična enačba (izpeljava: 2.5)

Izhodišče je 2. Newtonov zakon: $\Sigma F = m \cdot a$ kjer sta $m = \rho V$ in $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.
Sile razdelimo na:

- masne sile, ki delujejo z neke razdalje (težnost, elektromagnetna sila, Coriolisova sila). Podamo jih na enoto mase, tj. delimo z m, torej je to pospešek $a = \frac{F}{m}$. Masne sile podane na enoto mase označimo z vektorjem $\vec{F}$;
- površinske sile, ki delujejo kontaktno, preko stika; to so normalne napetosti (tlaki) in strižne napetosti. Površinske sile označimo s tenzorjem $[\sigma]$.

1.13 Lastnosti tokovnic

- Pravokotno na tokovnico ni pretoka;
- med sosednjima tokovnicama teče enak pretok. Razdalja med tokovnicama je obratnosorazmerna s hitrostmi (večja razdalja pomeni manjše hitrosti);
- tokovnice se ne sekajo, lahko pa se stikajo v singularnih točkah, kakršni sta izvor in ponor;
- mejne tokovnice so lahko: obrisi trdnega telesa (če ni odlepljanja tokovnic), gladina stalnega toka v kanalu ali reki, gladina jezera.

1.14 Cauchy-Riemann

Povezavo med tokovno funkcijo in hitrostnim potencialom podajajo Cauchy-Riemannove enačbe, in sicer preko komponent hitrosti toka.

- V kartezičnem koordinatnem sistemu $(x,\, y)$ nastopata hitrosti u in v:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$
$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

- V polarnem koordinatnem sistemu $(r,\, \theta)$ nastopata radialna hitrost v_r in tangencialna hitrost v_θ:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$
$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

1.15 Tokovne mreže: lastnosti in metode določanja

1.15.1 Lastnosti tokovnih mrež

1. Tokovnice (družina krivulj $\Psi = konst.$) in ekvipotencialne črte (družina krivulj $\Phi = konst.$) so v vsaki točki med seboj pravokotne. To dokažemo s skalarnim produktom njihovih gradientov;
2. pretok med dvema tokovnicama (δQ) je konstanten in hitrost v je obratno sorazmerna razdalji med tokovnicama (δn). To pokažemo s tokovno mrežo v naravnih koordinatah $(s,\, n)$;
3. liki, ki jih tvori tokovna mreža (tj. celice tokovne mreže), so v splošnem krivočrtni kvadrati. Čim bolj se mreža gosti, tem bolj morajo biti celice podobne kvadratom;
4. v tokovni mreži lahko vlogi Ψ in Φ zamenjamo, saj za obe funkciji velja Laplacova enačba ($\Delta\Psi = 0$ in $\Delta\Phi = 0$)

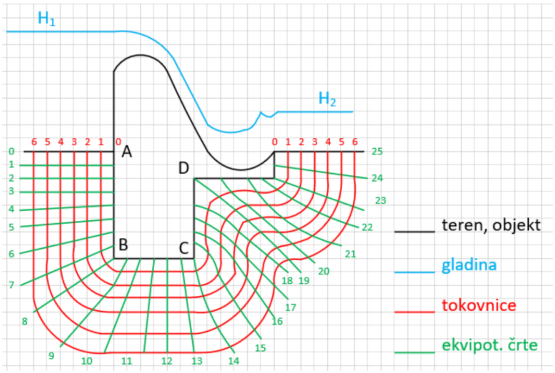

Figure 9: primer tokovne mreže toka podtalnice pod pregrado

1.15.2 Metode za določanje tokovnih mrež (samo naštej)

Vse analogije so povezane z **Laplace enačbo**. V številnih praktičnih primerih upravičeno predpostavimo, da je tok potencialen, zato zanje lahko konstruiramo tokovno mrežo po eni od metod:

- grafično:
  - s poskušanjem narišemo približno mrežo
  - dokaj zamudno in netočno
- analitično
  - standardni poteki toka:
    - vzporedni tok, izvor, ponor, potencialni vrtinec, dipol
  - konformne preslikave
    - s transformacijo prevedemo na enostavnejšega, ga rešimo in nato rešitve prevedemo nazaj na izhodiščni problem
- numerično
  - metoda relaksacije
    - kadar so robni pogoji preveč zakomplicirani za uporabo analitičnega pristopa
    - mrežo prilagajamo tako, da zadosti Laplace-ovi enačbi
    - čez domeno narišemo mrežo in predpostavimo, da je sprememba Ψ med sosednjimi vozlišči linearna
  - metoda končnih elementov
    - domeno lahko razdelimo tudi na štirikotnike in/ali trikotnike
    - mrežo zgostimo, kjer je to potrebno
    - namen je določiti Ψ in Φ v diskretnih točkah
- eksperimentalno oz. z analogijami
  - viskozna analogija
  - membranska analogija
  - električna analogija

1.16 Spreminjanje cirkulacije

1. Vpliv masnih sil na cirkulacijo:
   - konservativne (imajo potencial): teža
     - NE
   - nekonservativne (nimajo potenciala): Coriolisova sila
     - LAHKO (kotna hitrost zemlje in hitrost toka)
2. Vpliv tlačnih sil na cirkulacijo:
   - barotropno stanje (gostota odvisna samo od tlaka p)
     - NE
   - baroklino stanje (gostota odvisna tudi od temperature T)
     - LAHKO (npr. konvekcija v morju)
3. Vpliv viskoznih sil na cirkulacijo:
   - viskozne sile vedno lahko spremenijo cirkulacijo

Torej konservativne masne sile, tlačne sile v barotropnem stanju in zanemarljive viskozne sile NE vplivajo na cirkulacijo.

1.17 3. Helmholtzov zakon

Na določeni vrtinčnici z dolžino l je razmerje $\frac{rot\,\vec{v}}{\rho \cdot l} = konst.$.

Čim daljša je vrtinčnica l, tem večja je hitrost vrtenja $rot\,\vec{v}$.

$$rot\,\vec{v} = konst. \cdot \rho \cdot l$$

1.18 Primeri (ne)vrtinčnega toka

1. Vrtinčni toki:
   (a) vrtenje tekočine skupaj s posodo zaradi viskoznosti. Merilnik se vrti **zaradi neenakomerne razporeditve obodne hitrosti**;

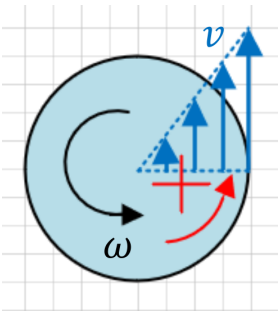

Figure 10: vrtenje tekočine skupaj z okroglo posodo

(b) tok viskozne tekočine ob ravni steni kanala. **Viskoznost zavira tok ob stenah - hitrost v mejni plasti je manjša**. Merilnik se v bližini stene vrti proti steni.

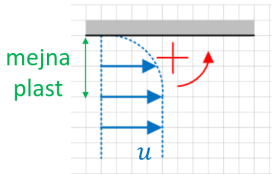

Figure 11: tok viskozne tekočine ob ravni steni kanala

2. Nevrtinčni tok:

   (a) potencialni vrtinec. V posodo ob obodu tangencialno priteka voda, ki nato steče proti odtoku na sredini posode. **Tokovnice so ukrivljene, tok pa ni vrtinčen**.

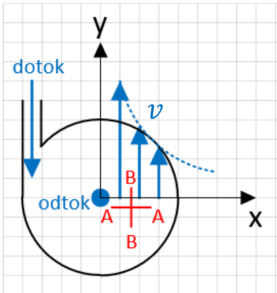

Figure 12: potencialni vrtinec

1.19 Bernoullijeva in energijska enačba: vse predpostavke, ne vseh izpeljav

- Imamo barotropno stanje (gostota odvisna le od tlaka):

$$grad\, P = grad \frac{p}{\rho_0}$$

- Edina masna (=volumska) sila je teža, ki je konservativna sila (=ima potencial):

$$\vec{F} = -grad\, U$$

- Imamo stalni tok:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

- Integriramo vzdolž tokovnice.

$$\vec{dr} = \vec{v} \cdot dt$$

Bernoullijeva enačba

podaja vsoto energije na enoto volumna $\left[\frac{Nm}{m^3} = \frac{N}{m^2}\right]$.

$$\rho g z + p + \rho \frac{v^2}{2} = konst.$$

$$\rho g z = \frac{mgh}{V} = \frac{W_p}{V} \qquad \frac{\rho v^2}{2} = \frac{mv^2}{V \cdot 2} = \frac{m\frac{v^2}{2}}{V} = \frac{W_k}{V}$$

Energijska enačba

Če Bernoullijevo enačbo delimo s produktom ρg, je v imenovalcu teža ($F_g = mg = \rho V g$), energija na enoto teže pa je višina $\left[\frac{Nm}{N} = m\right]$:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = konst. = E\ višina$$

z ... potencialna višina
$\frac{p}{\rho g}$ ... tlačna višina
$\frac{v^2}{2g}$ ... kinetična višina

1.20 Merjenje pretoka

- **Venturimeter**:
  - če na horizontalni cevi z zožitvijo merimo tlake, lahko iz razlike tlačnih višin izračunamo stalni pretok

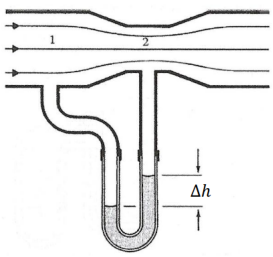

Figure 13: venturimeter

- zaslonka oz. diafragma,
- elektromagnetni merilniki v ceveh,
- merilna korita in ultrazvočni merilniki prelivne višine, hidrometrična krilca v kanalih odpadnih voda in
- ADCP, pregrade v rekah.

1.21 Kavitacija

Osnovna enačba hidrostatike:

$$p_{abs} = p_0 + p_{rel} = 1 \text{ bar } + \rho g h$$

$p_{abs} = 0$ dosežemo, če je $p_{rel} = -1\ bar$. To dosežemo s srkanjem, npr. v sesalni cevi črpalke. V primeru takega podtlaka nastopi kavitacija.

Pri sobni temperaturi se pri takem tlaku voda upari in nastanejo mehurčki vodne pare, ki nato potujejo s tokom, dokler ne pridejo na področje višjega tlaka, kjer se utekočinijo s procesom, ki se imenuje **kavitacija**.

Implozija poteka hitro, povzroča močne vibracije ter lokalno sprošča veliko energije, kar lahko povzroča erodiranje cevi, lopatic črpalk, ...

Sisteme je treba načrtovati tako, da ne pride do kavitacije - brez naglih zožitev cevi, kjer so hitrosti največje.

1.22 Darcy-jev zakon za tok podtalnice v poroznem materialu

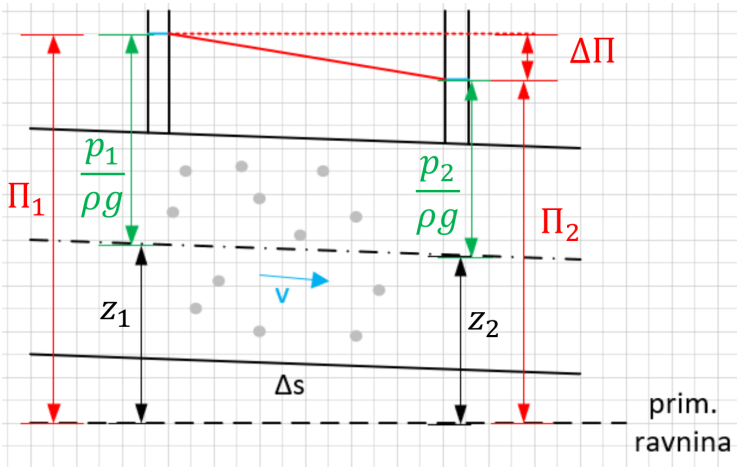

Figure 14: tok podtalnice - Darcyjev zakon

Zakon pravi, da voda teče v smeri največjega padca piezometrične višine, hitrost toka pa znaša: $\vec{v} = -k \cdot grad\,\Pi$

Pri čemer je:

- k koeficient prepustnosti, ki je odvisen od zemljine in viskoznosti tekočine;
- Π piezometrična višina;
- $\Pi = z + \frac{p}{\rho g}$.

Darcy-jev zakon za tok v eni smeri:

$$v = \frac{Q}{S} = -k \cdot \frac{\Delta\Pi}{\Delta s} \rightarrow \Delta\Pi = -\frac{v \cdot \Delta s}{k}$$

- padec $\Delta\Pi$ je definiran tako, da je v smeri toka negativen;

- S je skupni presek por in zrn, kar pomeni, da je v neka računska hitrost. Dejanski presek por je manjši od S, zato je dejanska hitrost večja od v;
- tudi če podtalnica teče skozi različno prepustne plasti, je $S = konst.$ in je pri $Q = konst.$ zato tudi $v = konst.$ Različno prepustne plasti se odražajo v različnih padcih $\Delta\Pi$ vzdolž posamezne plasti;
- padec piezometrične črte pomeni energijske izgube.

1.23 Primeri toka podtalnice

Obravnavamo tok podzemne vode v poroznih materialnih in ne v razpokah zemljin oz. skal.

Tok ni idealen (neviskozen), ker nastopajo energijske izgube, ki jih ne moremo zanemariti; tok pa je pe vedno potencialen.

Primeri toka podtalnice:

- vodnjaki za črpanje podtalnice za oskrbo z vodo ali namakanje,

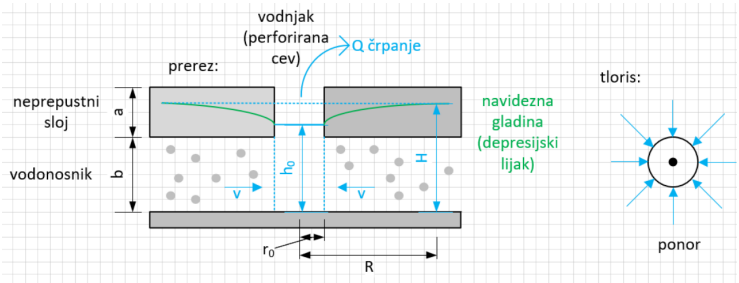

Figure 15: vodnjak za črpanje podtalnice

- filtracija skozi nasipe, zemeljske pregrade in pod pregradami,

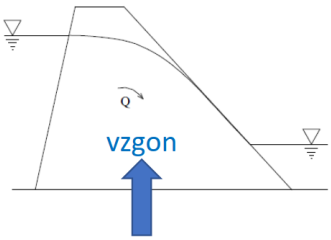

Figure 16: filtracija skozi nasipe

- dreniranje gradbene jame (podobno kot vodnjaki).

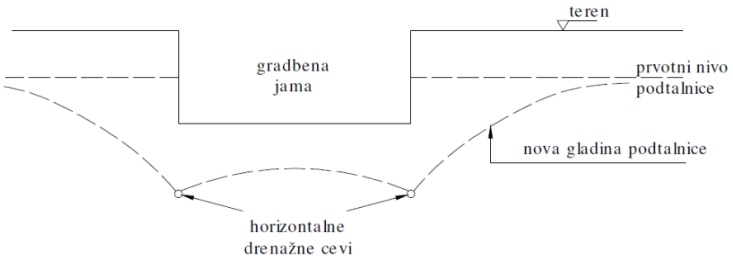

Figure 17: filtracija skozi nasipe

1.24 Tok pod pregrado

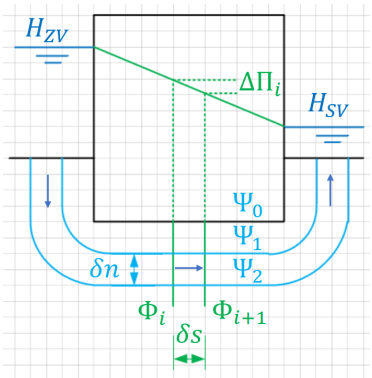

Figure 18: tok pod pregrado

- Tok po prepustni plasti pod pregrado teče zaradi višinske razlike:

$$|\Delta\Pi| = H_{ZV} - H_{SV} = |\Sigma\Delta\Pi_i|$$

- če je pod pregrado m tekočinskih cevk, je skupni pretok v njih:

$$Q = k \cdot \check{s} \cdot \frac{m}{n} \cdot (H_{ZV} - H_{SV})$$

- ker je pregrada s spodnje strani omočena, nanjo deluje vzgon. K vzgonu prispeva tlak, katerega diagram je zgoraj omejen s potekom piezometrične črte:

$$F_{vzgon} = \rho_v \cdot g \cdot V_v$$

1.25 Teorem o gibalni količini: osnovni pojmi

- Uporabno pri računanju sil, ki nastopajo v kolenih cevovodov, curkih ipd.;
- računamo stanje na vtoku in iztoku ter skupno reakcijsko silo;

- sila sidranja šobe ali kolena je enaka sili reakcije in je nasprotno enaka sili curka;
- reakcijsko silo F_r predpostavimo v pozitivni smeri;

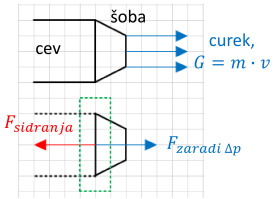

Figure 19: reakcijska sila - šoba

1.26 Turbulentni tok: značilnosti

- Velika večina vseh tokov je turbulentnih;
- iščemo razpored $\vec{v}$in p;
- poleg $\vec{v}$ in p iščemo tudi širjenje koncentracije snovi ali toplote;
- **nered:**
  - razpored hitrosti tudi ob natančni ponovitvi poskusa ni nikoli povsem enak
  - $u(t)$ se spreminja zaradi stohastičnega gibanja vrtincev v vseh smereh;
  - kot približek lahko lokalno hitrost obravnavamo kot:
    tenutna = časovno povprečna + pulzacija (fluktuacija);

$$u = \overline{u} + u'$$
$$v = \overline{v} + v'$$
$$w = \overline{w} + w'$$

- **mešanje:**
  - se odvija v vseh smereh,
  - z mešanjem se prenaša m in $\vec{G}$, zaradi česar je razpored hitrosti drugačen kot pri laminarnem toku,
  - zaradi turbulentnih napetosti in zaradi večjega gradienta so v mejni plasti izgube energije večje kot pri laminarnem toku;

$$\Delta E = f(v^2)$$

- **vrtinčnost:**
  - rotor hitrosti $rot\,\vec{v}$ nastopa v vseh treh smereh;
  - večji vrtinci (=makroturbulenca) so istega reda kot karakteristična dimenzija;
  - manjši vrtinci (=mikroturbulenca) nastajajo znotraj večjih, v njih poteka disipacija energije;
  - energijska kaskada

1.27 Fr in Re število

Froudovo število je razmerje med vplivom vztrajnosti in vplivom gravitacije ter določa režim toka:

- $Fr < 1$ ... mirni tok,
- $Fr = 1$ ... kritični tok,
- $Fr > 1$ ... deroči tok.

Reynoldsovo število je razmerje med vplivom vztrajnosti in vplivom viskoznosti ter določa intenziteto toka in s tem laminarnost / turbulentnost toka:

- nizek Re ... laminarni tok,
- visok Re ... turbulentni tok.

1.28 Modeli turbulence: samo opisno

1. Boussinesq-ov fenomenološki pristop:
   - turbulentne napetosti obravnavamo analogno viskoznim;
   - ker so viskozne napetosti za red manjše od turbulentnih, jih lahko vključimo k turbulentnim in oboje skupaj računamo z efektivno napetostjo/viskoznostjo;
   - koeficient efektivne viskoznosti ni lastnost tekočine, temveč lastnost toka.
2. Prandtlov model dolžine mešanja:
   - koeficient efektivne viskoznosti v_{ef} ni več konstanten, temveč izražen z gradientom hitrosti in dolžino mešanja.
3. Model $k - \varepsilon$ ('k-epsilon'):
   - računa efektivne napetosti;
   - upošteva dve dodatni enačbi za produkcijo turbulentne kinetične energije k in disipacijo te enrgije ε.
4. Ostali

1.29 Mejna plast

Teorija mejne plasti: učinki viskoznosti se kažejo le v mejni plasti, ostali del toka pa se obnaša kot idealna tekočina.

Lastnosti:

- tik ob mirujoči steni je hitrost toka $u = 0$;
- tik ob steni nastane tenak laminarni film;
- debelina mejne plasti je razdalja od stene, kjer velja $u = 0,95\,u_0$;
- pri toku vzdolž stene debelina mejne plasti narašča;
- lahko je laminarna ali turbulentna;

- glede na hrapavost ostenja in debelino laminarnega filma ločimo turbulentni tok:
  1. nad hidravlično gladko površino,
  2. nad hidravlično hrapavo površino in
  3. v hidravlično prehodnem območju.
- tok v cevi je največkrat v hidravlično hrapavem območju.

1.30 Odlepljanje tokovnic

Pri obtekanju objekta lahko pride do širjenja mejne plasti, s tem pa tudi do odlepljanja tokovnic, ki so zunaj te plasti. Zaradi tega se spremeni tokovna sila, razpored tlakov na objekt in sila, s katero tekočina deluje na objekt.

Odlepljanje je odvisno predvsem od gradienta tlaka.

1.31 Sila upora pri obtekanju potopljenih objektov

Skupna sila upora je vsota dveh prispevkov:

1. upor trenja (=viskozni upor) - strižne napetosti vzdolž površine in
2. upor oblike (=tlaki) - normalne napetosti, ki so zaradi dinamičnih učinkov razporejene neenakomerno.

Določitev sile upora:

- obe vrsti upora nastopata istočasno in ju zajamemo v eno skupno silo upora:

$$F = C_d \cdot \Delta p \cdot S = C_d \cdot \frac{\rho {u^2}_0}{2} \cdot S$$

1.32 Problematika mostnih opornikov (zagozdeno plavje in erozija)

- Oviranje toka, zajezba - zvišanje gladine in vzgon,
- oviranje toka - preusmeritev toka bočno,
- povečanje erozije (izpostavljeni temelji) in
- povečanje horizontalne obtežbe.

1.33 Modelna podobnost

Model je aproksimacija prototipa in je lahko fizični, numerični in matematični.

- Da se rezultate fizičnih modelov lahko prenese na prototip, je treba zadostiti kriterijem modelne podobnosti;
- vsak model je potrebno umeriti na meritve iz laboratorija in/ali narave;
- vrste podobnosti fizičnih modelov so geometrijska, kinematična in dinamična;
- modelno podobnost pogojujeta teža in viskoznost. V praksi je vpliv ene pogosto veliko večji od vpliva druge.

1.34 Fizični hidravlični modeli

Fizični hidravlični modeli so 'makete' v pomanjšanem merilu, izjemoma 1:1.

- Uporaba:
  - problemi s prosto gladino,
  - meritve za določanje koeficientov,
  - osnovne raziskave kompleksnih 3-D pojavov in
  - za probleme, kjer bi bile računalniške simulacije vprašljive ali neekonomične.
- Modeli glede na merilo dolžin λ:
  - nedistorzirani in
  - vertikalno distorzirani.
- Modeli glede na dno:
  - s fiksnim dnom in
  - z gibljivim dnom.

Omejitve: velikost laboratorija, kapaciteta črpalk, modelna podobnost, meritve, ...

1.35 Postopek numeričnega modeliranja

- Dimenzija problema,
- ločljivost,
- robni pogoji,
- začetni pogoji,
- notranji pogoji,
- koeficienti na podlagi meritev,
- umerjanje na meritve,
- verificiranje na meritve in
- analiza občutljivosti.

2 Izpeljave

2.1 Velikost sile hidrostatičnega tlaka na ravno ploskev

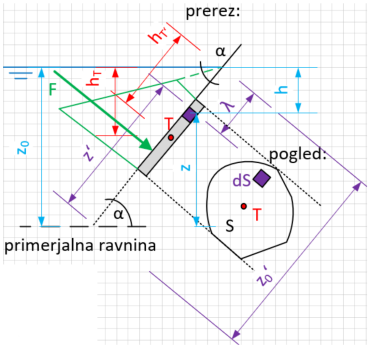

Figure 20: velikost sile hidrostatičnega tlaka na ravno ploskev

$$F = p \cdot S \qquad /dF = p \cdot dS$$

$$F = \int p dS \qquad /p = \rho g h = \rho g (z_0 - z)$$

$$F = \int \rho g (z_0 - z) dS$$

$$F = \rho g \int (z_0 - z) dS$$

Člen $(z_0 - z)$ je globina delca dS; spremenili jo bomo v poševno razdaljo λ, da pridemo v ravnino ploskve:

$$\sin\alpha = \frac{z}{z'} \qquad \rightarrow z = z' \cdot \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{z_0}{z_0'} \qquad \rightarrow z_0 = z_0' \cdot \sin\alpha$$

Nadaljevanje:

$$F = \rho g \int (z_0' \cdot \sin\alpha - (z' \cdot \sin\alpha)) dS \qquad /\text{izpostavimo } \sin\alpha$$

$$F = \rho g \int \sin\alpha (z_0' - z') dS$$

$$F = \rho g \cdot \sin\alpha \int (z_0' - z') dS \qquad /\text{razlika v oklepaju ravno razdalja } \lambda$$

$$F = \rho g \cdot \sin\alpha \int \lambda dS$$

Integral je del splošne formule za določitev koordinat težišča $T(x_T, y_T)$ poljubne ploskve A:

$$x_T = \frac{1}{A}\int_A x dA \qquad\qquad y_T = \frac{1}{A}\int_A y dA$$

V našem primeru se v integralu skriva:

$$\lambda_T = \frac{1}{S}\int \lambda dS$$

Torej:

$$\begin{aligned}
F &= \rho g \cdot \sin\alpha \cdot \lambda_T \cdot S && /\lambda_T = h'_T \\
F &= \rho g \cdot \sin\alpha \cdot h'_T \cdot S && /h'_T \cdot \sin\alpha = h_T \\
\boldsymbol{F} &\boldsymbol{= \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S} && \boxdot
\end{aligned}$$

2.2 Prijemališče sile tlaka na ravno ploskev

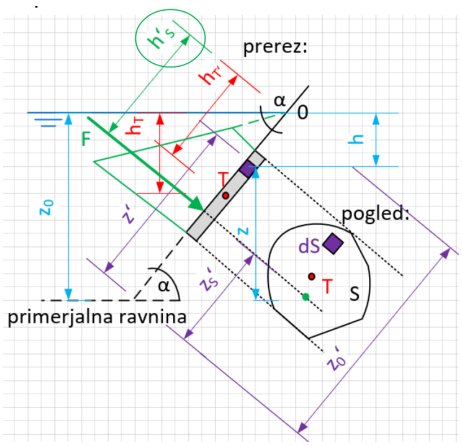

Figure 21: prijemališče sile tlaka na ravno ploskev

$$\begin{aligned}
\int_S dF \cdot (z'_0 - z') &= F(z'_0 - z'_S && /dF = pdS \\
\int_S (z'_0 - z') \cdot pdS &= F(z'_0 - z'_S && /\text{L: } p = \rho g(z_0 - z) \text{ D: } F = \rho g h_T S
\end{aligned}$$

$$\int (z'_0 - z') \cdot \rho g(z_0 - z) dS = \rho g h_T S \cdot (z'_0 - z'_S)$$

Upoštevamo zvezo med ravninama, ki smo jo uporabili že pri izpeljavi velikosti sile:

$$z = z' \cdot \sin\alpha \qquad\qquad z_0 = z'_0 \cdot \sin\alpha$$

Nadaljevanje:

$$\rho g \int (z_0' - z')(z_0' \sin\alpha - z' \sin\alpha) dS = \rho g h_T S \cdot (z_0' - z_S') \quad /(z_0' - z_S') = h_S'$$

$$\rho g \int (z_0' - z') \sin\alpha (z_0' - z') dS = \rho g h_T S \cdot h_S' \quad /\text{pokrajšamo } \rho g$$

$$\int (z_0' - z') \sin\alpha (z_0' - z') dS = h_T S \cdot h_S'$$

$$\sin\alpha \int (z_0' - z')^2 dS = h_T S \cdot h_S'$$

Integral je izraz za vztrajnostni moment J_0 ploskve S na os 0; to najhitreje vidimo, če se spomnimo Steinerjevega izreka, ki pravi: $J = J_T + S \cdot r^2$.

Torej:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha \cdot J_0 &= h_T S \cdot h_S' && / : \sin\alpha \\
J_0 &= \frac{h_T \cdot S \cdot h_S'}{\sin\alpha} && / \frac{h_T}{\sin\alpha} = h_T' \\
J_0 &= h_T' \cdot S \cdot h_S' && / J_0 = J_T + S \cdot h'^2{}_T \\
J_T + S \cdot h'^2{}_T &= h_T' \cdot S \cdot h_S' \\
h_S' &= \frac{J_T + S \cdot h'^2{}_T}{h_T' \cdot S} \\
h_S' &= \frac{J_T}{h_T' \cdot S} + \frac{S \cdot h'^2{}_T}{h_T' \cdot S} \\
\boldsymbol{h_S' &= \frac{J_T}{h_T' \cdot S} + h_T'} && \boxdot
\end{aligned}$$

2.3 Osnovna enačba hidrostatike

Izhajamo iz dinamične enačbe za idealno in nestisljivo tekočino oz. Eulerjeva enačba:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\, p$$

... p se v horizontalnih semereh ne spreminja, zato nas zanima le smer z:

$$\frac{dw}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Pri hidrostatiki velja, da tekočina miruje: $\vec{v} = 0 \rightarrow$ odvodi hitrosti so enaki nič; in da od masnih sil (tj. pospeškov F/m) nastopa samo gravitacija ($F_g = m \cdot g$) v smeti $-z$:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -g)$$

Eulerjeva enačba v smeri z se tako glasi:

$$
\begin{aligned}
0 &= -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g && \text{/ lahko pišemo navadne odvode} \\
dp &= -\rho g dz && \text{/ integriramo} \\
\int dp &= \int -\rho g dz && \text{/ } \rho = konst., g = konst.\text{; meje integralov} \\
\int_{p_0}^{p_A} dp &= -\rho g \int_{z_0}^{z_A} dz \\
p_A - p_0 &= -\rho g(-h-0) \\
p_A &= p_0 + \rho g h && \boxdot \\
\boldsymbol{p_{absolutni}} &= \boldsymbol{p_{zračni}} + \boldsymbol{p_{relativni}} && \text{osnovna enačba hidrostatike}
\end{aligned}
$$

2.4 Kontinuitetna enačba

Skupna sprememba = časovna sprememba znotraj volumna V + pretok skozi površino S

totalni odvod: **časovni odvod** mase znotraj V + **neto masni pretok** skozi S = **0**

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho dV + \iint \rho \vec{v} d\vec{S} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho dV &= -\iint \rho \vec{v} d\vec{S}
\end{aligned}
$$

Na levi strani imamo prostorski integral, na desni pa ploskovnega. Za nadaljevanje izpeljave moramo dvojnega spremeniti v trojnega z uporabo Gaussovega teorema:

$$
-\iint \rho \vec{v} d\vec{S} = -\iiint div(\rho \vec{v}) dV
$$

Nadaljujemo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho dV &= -\iiint div(\rho \vec{v}) dV \\
\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v})\right) dV &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) &= 0 && \boxdot
\end{aligned}
$$

Izpeljana je kontinuitetna enačba v osnovni vektorski diferencialni obliki. Običajno nastopata naslednji poenostavitvi:

- stalni tok $Q = konst. \rightarrow \frac{\partial(karkoli)}{\partial t} = 0 \rightarrow div(\rho \vec{v}) = 0$

- nestisljiva tekočina $\rho = konst.$:

$$\rho \cdot div\,\vec{v} = 0 \qquad /\rho \neq 0, : \rho$$
$$div\,\vec{v} = 0$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \qquad \boxdot$$

Kontinuitetna enačba za stalni tok nestisljive tekočine.

2.5 Dinamična enačba (Navier-Stokes)

Izhodišče je 2. Newtonov zakon: $\Sigma F = m \cdot a$ kjer sta $m = \rho V$ in $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

2. Newtonov zakon zapišemo z vektorji in integrali:

- člen $m \cdot \vec{a}$ zapišemo kot:

$$m \cdot \vec{a} = \iiint \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$$

- da dobimo sile, moramo masne sile pomnožiti z maso $m = \rho V$ in tudi ta člen spravimo v trojni integral:

$$\vec{F} \cdot m = \iiint \vec{F} \rho dV$$

- da dobimo sile, moramo napetosti pomnožiti s ploskvijo (saj $\sigma = \frac{F}{S}$) in pridemo do dvojnega integrala:

$$[\sigma] \cdot S = \iint [\sigma] d\vec{S}$$

V našem primeru se 2. Newtonov zakon, zapisan z integrali glasi:

$$\iiint \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint \vec{F} \rho dV + \iint [\sigma] d\vec{S} \qquad /Gauss$$
$$\iiint \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint \vec{F} \rho dV + \iiint div[\sigma] dV$$
$$\iiint \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \rho - \vec{F} \rho - div[\sigma] \right) dV = 0 \qquad /oklepaj = 0$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} \rho - \vec{F} \rho - div[\sigma] = 0 \qquad / : \rho, \rho \neq 0$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} - \frac{1}{\rho} div[\sigma] = 0$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} div[\sigma] \qquad /izpeljemo\ div[\sigma]$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\,p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} + \frac{\mu}{3\rho} grad\,div\,\vec{v}$$

Če upoštevamo še kinematično viskoznost $v = \frac{\mu}{\rho}$ pa dobimo:

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\,p + v \Delta \vec{v} + \frac{v}{3} grad\,div\,\vec{v}} \quad \boxdot$$