Ganna Kudryavtseva, Mojca Premuš, Marjeta Škapin Rugelj

Matematika 1

Izpitne naloge s postopki reševanja

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

MATEMATIKA 1

Izpitne naloge s postopki reševanja

Ganna Kudryavtseva

Mojca Premuš

Marjeta Škapin Rugelj

Ljubljana, 2019

Ganna Kudryavtseva, Mojca Premuš, Marjeta Škapin Rugelj

MATEMATIKA 1

Izpitne naloge s postopki reševanja

Univerzitetni učbenik

Recenzenta:
Marjeta Kramar Fijavž
Aljoša Peperko

Oblikovalec naslovnice:
Niko Fabiani

Publikacija je brezplačna.
Ljubljana, 2019

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(079.1)

KUDRYAVTSEVA, Ganna
Matematika 1 : izpitne naloge s postopki reševanja : univerzitetni učbenik / Ganna Kudryavtseva, Mojca Premuš, Marjeta Škapin Rugelj. - Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2019

ISBN 978-961-6884-64-8 (pdf)

1. Premuš, Mojca 2. Škapin-Rugelj, Marjeta

COBISS.SI-ID 300434944

Predgovor

V svoji karieri se vsak inženir grabeništva, geodezije in vodarstva dnevno srečuje z različnimi matematičnimi problemi s področja trigonometrije, vektorjev, algebre, statistike, diferencialnih enačb in še bi lahko naštevali. Z matematiko se srečujejo tudi posredno na primer preko fizikalnih problemov in problemov statike. Na dodiplomskih univerzitetnih študijih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo univerze v Ljubljani so zato matematični predmeti precej zahtevni in od študenta zahtevajo poglobljeno znanje in razumevanje tako osnovnih kot tudi kompleksnejših matematičnih pojmov.

V slovenščini je kar nekaj klasičnih zbirk, ki pokrivajo snov, obravnavano v tej zbirki, zato smo se avtorice odločile, da pripravimo drugačen tip zbirke. Zbirka pred vami je namenjena študentom prvega letnika univerzitetnih študijev na Fakulteti za gradbeništvo in geodezije kot gradivo za pripravo na kolokvije in izpite pri predmetu Matematika 1. Zbirka vsebuje izpitne naloge in naloge s kolokvijev štirih študijskih let (od 2012/13 do 2016/17) iz predmeta Matematika 1 ter njihove rešitve. Naloge zato niso enakomerno porazdeljene po temah in nekatere izmed njih povezujejo več tem učnega načrta predmeta. Naloge se ne stopnjujejo po težavnosti, kot smo vajeni v zbirkah, ki sistematično obravnavajo in razlagajo učno snov. Posledično lahko študent naloge iz zbirke rešuje po vrstnem redu ali pa naključno izbere nalogo nekega poglavja, ki ga želi predelati. Za boljšo predstavo, kako so naloge po snoveh razdeljene na posameznem izpitnem roku, lahko študent poišče razporeditev nalog po kolokvijih in izpitnih rokih na strani 166. Vsak študent lahko tudi testira svojo pripravljenost za izpit tako, da v običajnem času (t.j. uro in pol za izpit) reši naloge izbranega izpitnega roka.

Da bi se študenti lahko čimbolje pripravili na preverjanje znanja, smo avtorice za zbrane naloge pripravile podrobne rešitve. Kadar je na razpolago več poti do rešitve naloge, smo jih tudi poskusile predstaviti, zagotovo smo pa kako pot tudi izpustile. Vodila nas je želja, da bi študenti spoznali različne pristope in najprej izbrali tistega, ki jim je najbolj pisan na kožo. Ko ta pristop do potankosti obvladajo, jim bodo verjetno tudi drugi bolj razumljivi in lažje obvladljivi. Vsekakor je pa zbirka bogat vir znanja, ki lahko poglobi razumevanje snovi obravnavanih poglavij.

Za vso pomoč, nasvete in podporo se zahvaljujemo svojim sodelavcem izr. prof. dr. Marjeti Kramar Fijavž, izr. prof. dr. Gašperju Jakliču in izr. prof. dr. Mitji Laknerju, ki so naloge sooblikovali, prebrali njihove rešitve in predlagali izboljšave. Hvala tudi recenzentu doc. dr. Aljoši Peperku za njegove opombe in predloge.

Kazalo

1 Definicijska območja in neenakosti

1. (1. kolokvij, 25.11.2013) Določite naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \cos\left(\frac{x(x+4)}{(x-1)(x-3)}\right) + \ln(1 - |2 - |x-1||).$$

Rešitev: Označimo

$$g(x) = \cos\frac{x(x+4)}{(x-1)(x-3)} \quad \text{in} \quad h(x) = \ln(1 - |2 - |x-1||).$$

Potem velja $D_f = D_g \cap D_h$. Funkcija g je definirana povsod, razen v ničlah imenovalca, to sta $x = 1$ in $x = 3$. Torej $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Funkcija h pa je definirana, kadar velja $1-|2-|x-1|| > 0$. Rešiti moramo torej dobljeno neenačbo z absolutnimi vrednostmi. Neenačbo bomo rešili na dva načina.

1. način
Najprej neenačbo prepišemo v obliko

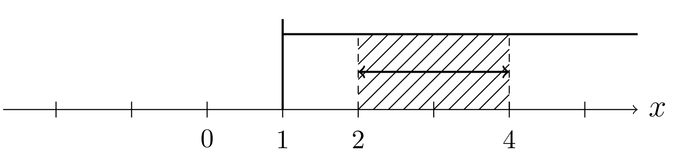
$$|2 - |x-1|| < 1. \tag{1}$$

Ločimo dva primera.

1. primer: Predpostavimo, da velja $x \geq 1$. Potem je $x-1 \geq 0$ in zato $|x-1| = x-1$. Neenačbo (1) lahko torej zapišemo kot $|2-(x-1)| < 1$ oziroma $|3-x| < 1$. Dobljeno neenačbo preuredimo:

$$\begin{aligned} -1 < 3 - x < 1, &\ \ \text{(odštejemo 3)} \\ -4 < -x < -2, &\ \ \text{(pomnožimo z } -1) \\ 2 < x < 4. & \end{aligned}$$

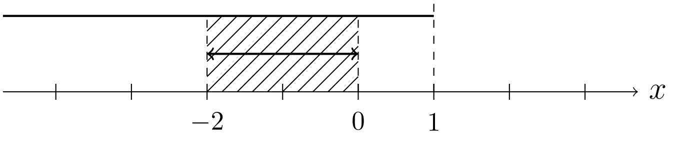
Presek dobljenega intervala $(2, 4)$ s predpostavko $x \geq 1$ je interval $I_1 = (2, 4)$.



2. primer: Predpostavimo, da velja $x < 1$. Potem je $x - 1 < 0$ in zato $|x-1| = -(x-1)$. Neenačbo (1) lahko torej zapišemo kot $|2+(x-1)| < 1$ oziroma $|1+x| < 1$. Dobljeno neenačbo preuredimo:

$$\begin{aligned} -1 < 1 + x < 1, &\ \text{(odštejemo 1)} \\ -2 < x < 0. & \end{aligned}$$

Presek dobljenega intervala $(-2, 0)$ s predpostavko $x < 1$ je $I_2 = (-2, 0)$.



Torej $D_h = I_1 \cup I_2 = (-2, 0) \cup (2, 4)$. Zato je

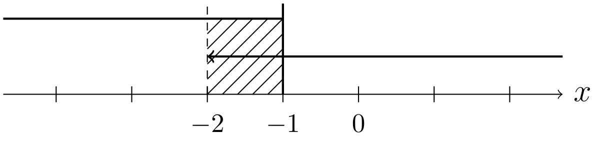
$$D_f = D_g \cap D_h = (-2, 0) \cup (2, 3) \cup (3, 4).$$

2. način
Izračunajmo točke, v katerih sta izraza pod znakom absolutne vrednosti enaka 0: $x - 1 = 0$ velja, kadar je $x = 1$ in $2 - |x-1| = 0$ velja, kadar je $x = 3$ ali $x = -1$. Točke $-1, 1$ in 3 razdelijo realno os na štiri intervale: $(-\infty, -1], (-1, 1], (1, 3]$ in $(3, \infty)$. Na vsakem od teh intervalov lahko odpravimo absolutne vrednosti.

1. primer: Predpostavimo, da velja $x \in (-\infty, -1]$. Potem je $x - 1 < 0$ (namreč, ker je $x \le -1$, je $x - 1 \le -2 < 0$) in zato je $|x-1| = -(x-1)$. Ker je

$$2 - |x-1| = 2 + (x-1) = 1 + x \le 0,$$

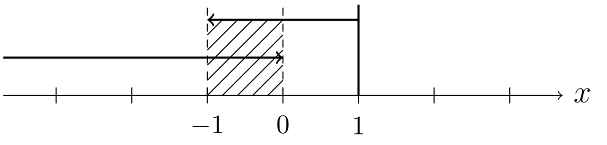
imamo $|2 - |x-1|| = -(2 + (x-1)) = -1 - x$. Dobili smo neenačbo $-1 - x < 1$. Njena rešitev je $x > -2$. Presek te rešitve s predpostavko je interval $I_1 = (-2, -1]$.



2. primer: Predpostavimo, da velja $x \in (-1, 1]$. Potem je $x - 1 \le 0$ (namreč, ker je $x \le 1$, je $x - 1 \le 0$) in zato je $|x-1| = -(x-1)$. Ker je

$$2 - |x-1| = 2 + (x-1) = 1 + x > 0,$$

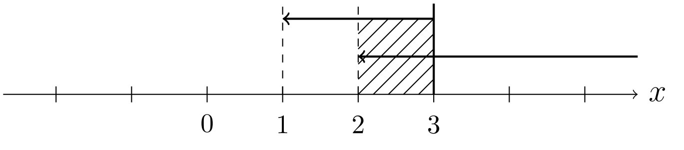
je $|2 - |x-1|| = 2 + (x-1) = 1 + x$. Dobili smo neenačbo $1 + x < 1$. Njena rešitev je $x < 0$. Presek te rešitve s predpostavko je interval $I_2 = (-1, 0)$.



3. primer: Predpostavimo, da velja $x \in (1,3]$. Potem je $x-1>0$ (namreč, ker je $x>1$, je $x-1>0$) in zato je $|x-1| = x-1$. Ker je

$$2-|x-1| = 2-(x-1) = 3-x \geq 0,$$

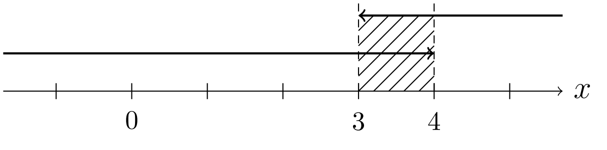
imamo $|2-|x-1|| = 2-(x-1) = 3-x$. Dobili smo neenačbo $3-x<1$. Njena rešitev je $x>2$. Presek te rešitve s predpostavko je interval $I_3 = (2,3]$.



4. primer: Predpostavimo, da velja $x \in (3,\infty)$. Potem je $x-1>0$ (namreč, ker je $x>3$, je $x-1>2>0$) in zato je $|x-1| = x-1$. Ker je

$$2-|x-1| = 2-(x-1) = 3-x < 0,$$

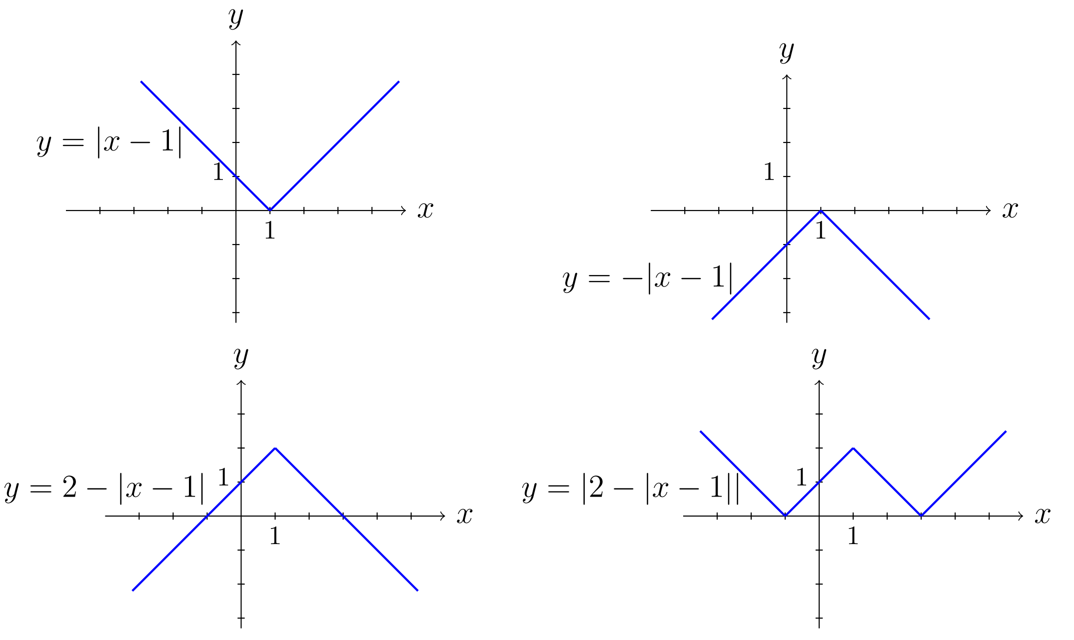
je $|2-|x-1|| = -(2-(x-1)) = -3+x$. Dobili smo neenačbo $-3+x<1$. Njena rešitev je $x<4$. Presek te rešitve s predpostavko je interval $I_4 = (3,4)$.



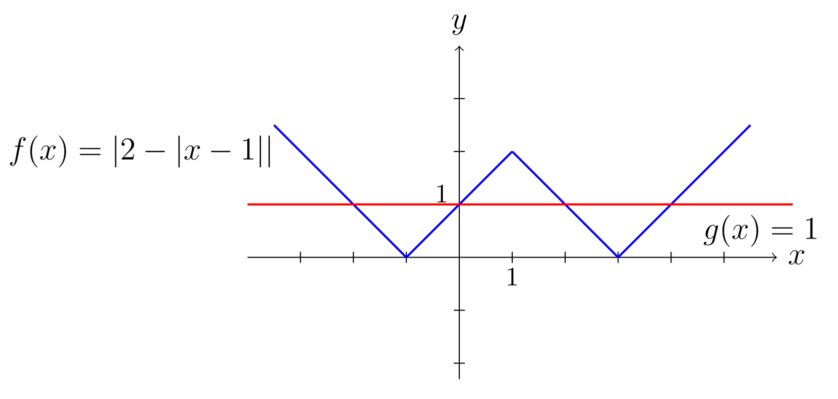
Torej $D_h = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = (-2,0) \cup (2,4)$. Zato je

$$D_f = D_g \cap D_h = (-2,0) \cup (2,3) \cup (3,4).$$

Opomba: Neenačbo $|2-|x-1|| < 1$ lahko rešimo tudi grafično. Z uporabo operacij na grafih funkcij narišemo graf funkcije $\big|2-|x-1|\big|$.



Zdaj narišemo dobljen graf in graf funkcije $g(x) = 1$ v istem koordinatnem sistemu. Neenakost $|2 - |x - 1|| < 1$ velja natanko za tiste vrednosti x, za katere je graf funkcije $f(x) = |2 - |x - 1||$ nižje od premice $g(x) = 1$. Iz slike je razvidno, da je to območje $(-2, 0) \cup (2, 4)$.



2. (1. izpit, 23.1.2014) Določite naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \frac{(x-7)\sin x}{(x+2)x} + \ln(|x^2 - 5x| - 6).$$

Rešitev: Označimo

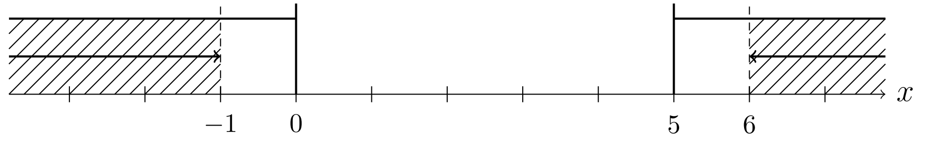
$$g(x) = \frac{(x-7)\sin x}{(x+2)x} \quad \text{in} \quad h(x) = \ln(|x^2 - 5x| - 6).$$

Potem velja $D_f = D_g \cap D_h$. Funkcija g je definirana povsod, razen v ničlah imenovalca: to sta $x = -2$ in $x = 0$. Zato je $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Funkcija h pa je definirana, kadar velja

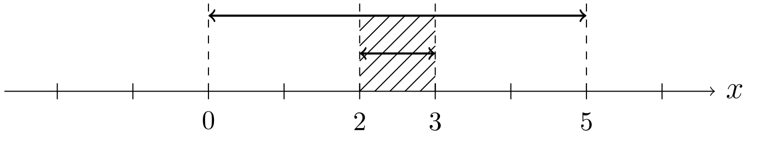
$$|x^2 - 5x| - 6 > 0. \tag{2}$$

Rešiti moramo dobljeno neenačbo z absolutno vrednostjo. Izraz pod znakom absolutne vrednosti razstavimo na faktorje $x^2 - 5x = x(x-5)$. Glede na predznak izraza $x(x-5)$ ločimo dva primera.

1. primer: Predpostavimo, da velja $x \leq 0$ ali $x \geq 5$. Potem je $x(x-5) \geq 0$ in zato $|x^2 - 5x| = x^2 - 5x$. Neenačbo (2) lahko torej zapišemo kot $x^2 - 5x - 6 > 0$ oziroma $(x+1)(x-6) > 0$. Rešitev dobljene neenačbe je $x < -1$ ali $x > 6$, njen presek s predpostavko je isti: $I_1 = (-\infty, -1) \cup (6, \infty)$.



2. primer: Predpostavimo, da velja $0 < x < 5$. Potem je $x(x-5) < 0$ in zato $|x^2 - 5x| = -(x^2 - 5x) = -x^2 + 5x$. Neenačbo (2) lahko torej prepišemo v obliko $x^2 - 5x + 6 < 0$ oziroma $(x-2)(x-3) < 0$. Rešitev dobljene neenačbe je $2 < x < 3$, njen presek s predpostavko je isti: $I_2 = (2, 3)$.



Torej je $D_h = I_1 \cup I_2 = (-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (6, \infty)$. Zato je

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, 3) \cup (6, \infty).$$

3. (1. kolokvij, 1.12.2014) Določite naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sin\left(\frac{x(x-1)(x+7)}{x+1}\right) + \ln(|x^2-4| - 3x).$$

Rešitev: Označimo

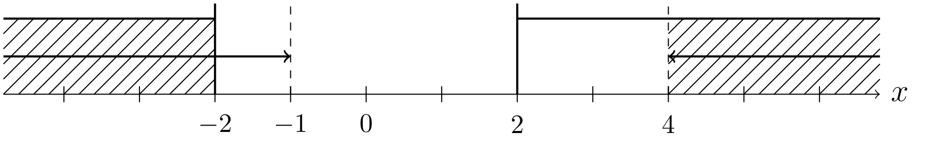
$$g(x) = \sin\left(\frac{x(x-1)(x+7)}{x+1}\right) \qquad \text{in} \qquad h(x) = \ln(|x^2-4| - 3x).$$

Torej velja $D_f = D_g \cap D_h$. Funkcija g je definirana povsod, razen v ničli imenovalca: to je $x = -1$. Zato je $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Funkcija h pa je definirana, kadar velja

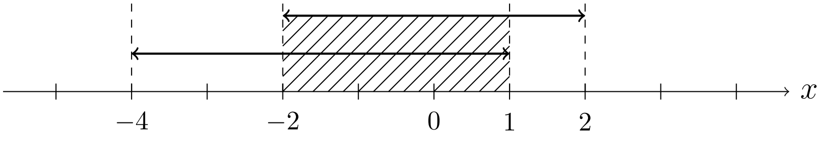
$$|x^2-4| - 3x > 0. \tag{3}$$

Rešiti moramo torej dobljeno neenačbo z absolutno vrednostjo. Glede na predznak izraza $x^2 - 4$ ločimo dva primera.

1. primer: Predpostavimo, da velja $x \leq -2$ ali $x \geq 2$. Potem je $x^2 - 4 \geq 0$ in zato $|x^2-4| = x^2 - 4$. Neenačbo (3) lahko torej zapišemo kot $x^2 - 4 - 3x > 0$ oziroma $(x-4)(x+1) > 0$. Rešitev dobljene neenačbe je unija intervalov $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$, njen presek s predpostavko pa je $I_1 = (-\infty, -2] \cup (4, \infty)$.



2. primer: Predpostavimo, da velja $-2 < x < 2$. Potem je $x^2 - 4 < 0$ in zato $|x^2-4| = -(x^2-4) = -x^2 + 4$. Neenačbo (3) lahko zapišemo kot $-x^2 + 4 - 3x > 0$ oziroma $(x+4)(x-1) < 0$. Rešitev dobljene neenačbe je interval $(-4, 1)$, njegov presek s predpostavko pa $I_2 = (-2, 1)$.



Torej je $D_h = I_1 \cup I_2 = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ in zato je $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (4, \infty)$.

4. (4. izpit, 31.8.2015) Poiščite naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x - 1}} + \arcsin\left(\frac{x-2}{5}\right).$$

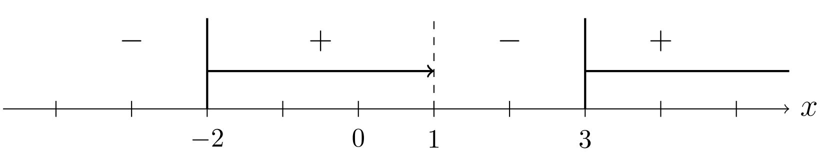
Rešitev: Označimo

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x - 1}} \quad \text{in} \quad h(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{5}\right).$$

Potem velja $D_f = D_g \cap D_h$. Najprej določimo definicijsko območje D_g funkcije g. Le-ta je definirana, kadar je izraz pod znakom kvadratnega korena nenegativen in $x \neq 1$. S faktorizacijo števca izraza pod korenom dobimo neenačbo

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x-1} \geq 0.$$

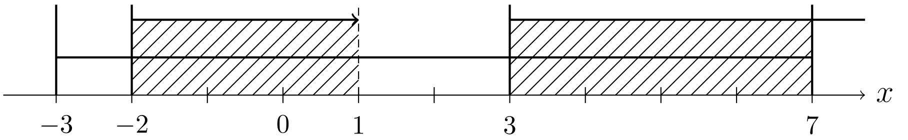
Ničli števca $x_1 = 3$ in $x_2 = -2$ in ničla imenovalca $x_3 = 1$ ulomka na levi strani neenačbe razdelijo številsko premico na štiri intervale: $(-\infty, -2], [-2, 1), (1, 3]$ in $[3, \infty)$. Na vsakem od teh intervalov ima ulomek $\frac{(x-3)(x+2)}{x-1}$ konstanten predznak. Če vstavimo $x = 0$, je ulomek enak $6 > 0$, zato je na intervalu $[-2, 1)$ vrednost ulomka pozitivna. Zaradi lihosti pola in ničel zdaj vemo, da je na sosednjih intervalih $(-\infty, -2]$ in $(1, 3]$ predznak ulomka negativen, in na intervalu $[3, \infty)$ spet pozitiven. Ker je D_g unija tistih intervalov, kjer je predznak pozitiven, je $D_g = [-2, 1) \cup [3, \infty)$.



Zdaj izračunajmo še D_h. Spomnimo se, da je funkcija $\arcsin x$ definirana, kadar velja $-1 \leq x \leq 1$. Zato je funkcija $h(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{5}\right)$ definirana, kadar velja

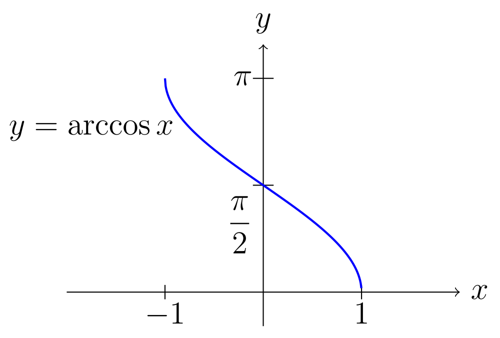
$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x-2}{5} &\leq 1, \text{ (pomnožimo s 5)} \\ -5 \leq x - 2 &\leq 5, \text{ (prištejemo 2)} \\ -3 \leq x &\leq 7. \end{aligned}$$

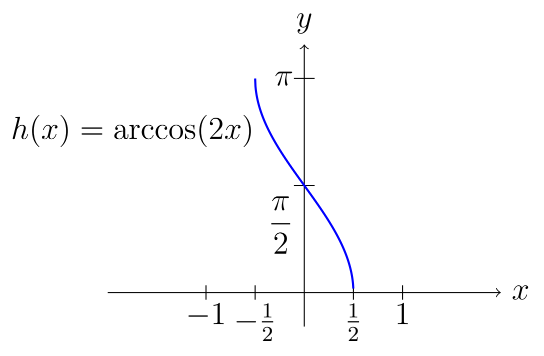
Torej $D_h = [-3, 7]$. Zdaj pa določimo $D_f = D_g \cap D_h = [-2, 1) \cup [3, 7]$.



> 5. (1. kolokvij, 23.11.2015) Za funkcijo
>
> $$f(x) = \ln(\arccos(2x))$$
>
> (a) določite definicijsko območje in zalogo vrednosti;
>
> (b) preverite, da je funkcija bijektivna in zapišite predpis njej inverzne funkcije f^{-1};
>
> (c) poiščite edino ničlo funkcije f^{-1}.

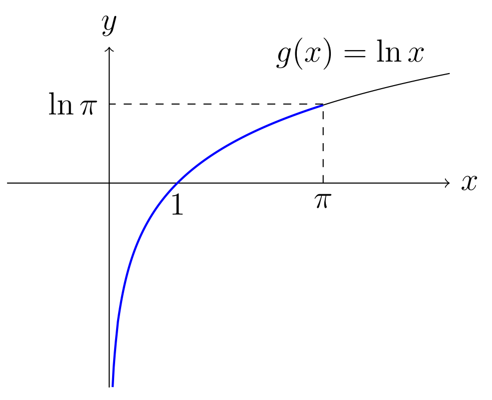
Rešitev:
(a) Ker je funkcija $\arccos x$ definirana za $x \in [-1, 1]$, je funkcija $h(x) = \arccos(2x)$ definirana za $2x \in [-1, 1]$ oziroma za $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.





Ker je funkcija $\ln x$ definirana za $x > 0$, je funkcija $f(x) = \ln(\arccos(2x))$ definirana za tiste vrednosti x iz definicijskega območja funkcije $\arccos(2x)$, za katere velja $\arccos(2x) > 0$. Iz grafa funkcije $\arccos(2x)$ na sliki je razvidno, da za vsak x iz intervala $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ velja $\arccos(2x) \geq 0$, pri čemer je $\arccos(2x) = 0$, kadar je $2x = 1$ oziroma $x = \frac{1}{2}$. Torej je definicijsko območje funkcije $f(x) = \ln(\arccos(2x))$ enako $D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Poiščimo še zalogo vrednosti funkcije $f(x) = \ln(\arccos(2x))$. Ugotovili smo že, da za $x \in D_f$ funkcija $\arccos(2x)$ zavzame vrednosti na intervalu $(0, \pi]$. Zato je zaloga vrednosti Z_f dane funkcije $f(x)$ enaka zalogi vrednosti funkcije $\ln x$ za $x \in (0, \pi]$. Le-ta, kot je razvidno iz grafa funkcije $\ln x$, je enaka $(-\infty, \ln \pi]$. Torej je tudi $Z_f = (-\infty, \ln \pi]$.



(b) Najprej preverimo, da je dana funkcija $f(x)$ bijektivna (sicer ne bi imela inverza!). Dana funkcija je kompozitum $f(x) = g(h(x))$, kjer je $h(x) = \arccos(2x)$ ter $g(x) = \ln x$. Iz grafov funkcij $\arccos x$ in $\ln x$ na slikah sledi, da je za $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ funkcija $h(x)$ bijektivna in da je za $x \in (-\infty, \pi)$ funkcija $g(x)$ bijektivna (ker ima poljubna premica $y = a$, kjer je $0 \leq a \leq \pi$, natanko eno presečišče z grafom funkcije). Ker je kompozitum bijektivnih funkcij bijektivna funkcija, je tudi funkcija $f\colon D_f \to Z_f$ bijektivna.

Inverzno funkcijo $f^{-1}\colon Z_f \to D_f$ poiščemo tako, da najprej zapišemo $y = f(x)$ in iz dobljene enačbe izrazimo x z y:

$$\begin{aligned} y &= \ln(\arccos(2x)), \\ e^y &= \arccos(2x), \\ \cos(e^y) &= 2x, \\ \frac{1}{2}\cos(e^y) &= x. \end{aligned}$$

Torej je $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\cos(e^y)$. Zdaj zamenjamo še vlogi spremenljivk x in y, da dobimo $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\cos(e^x)$, $x \in (-\infty, \ln \pi]$.

(c) Ničla funkcije f^{-1} je rešitev enačbe $f^{-1}(x) = 0$, $x \in D_{f^{-1}}$. Poiskali jo bomo na dva načina.

1. način
Rešimo enačbo $f^{-1}(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cos(e^x) &= 0,\\
\cos(e^x) &= 0,\\
e^x &= \arccos 0 = \pi/2,\\
x &= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Torej je $x = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$ edina ničla funkcije f^{-1}.

2. način
Upoštevamo, da enakost $f^{-1}(x) = 0$, $x \in D_{f^{-1}}$, velja natanko takrat, kadar je $f(0) = x$. Zato je

$$x = f(0) = \ln(\arccos 0) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

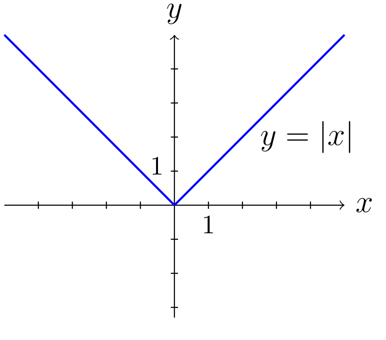
6. (1. izpit, 28.1.2016) Določite vsa števila x, za katera velja neenakost

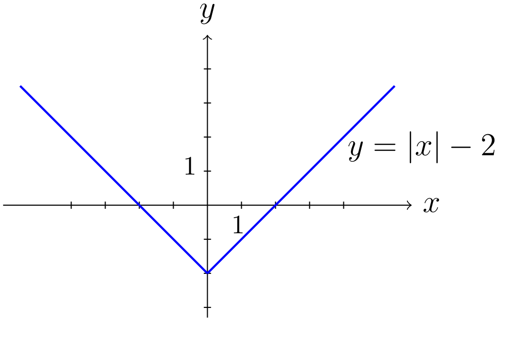
$$\big||x| - 2\big| < \frac{1}{4}\,|x+2| \tag{4}$$

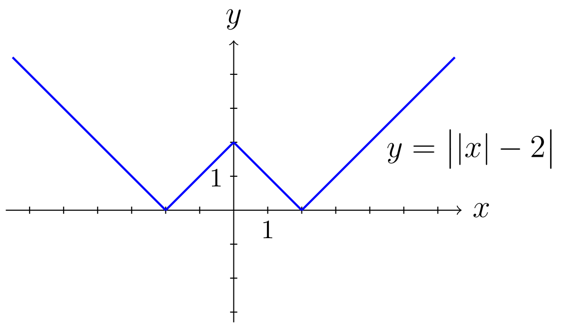
in narišite grafa na obeh straneh neenačaja v $\mathbb{R}^2$. 'Popravite' štirico v neenačbi tako, da bo množica rešitev natanko interval $(1, 4)$.

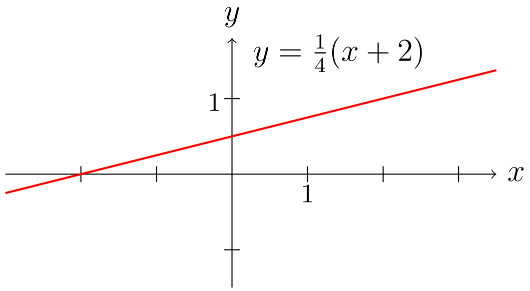
Rešitev: Nalogo bomo rešili na dva načina.

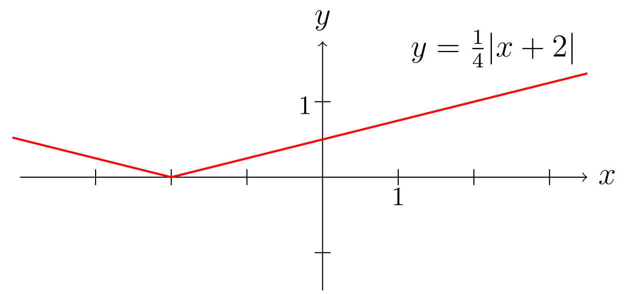
1. način
Ker naloga zahteva, da skiciramo grafa, se lotimo reševanja naloge grafično. Z uporabo operacij na grafih funkcij narišemo grafe funkcij $\big||x| - 2\big|$ in $\frac{1}{4}\,|x+2|$.







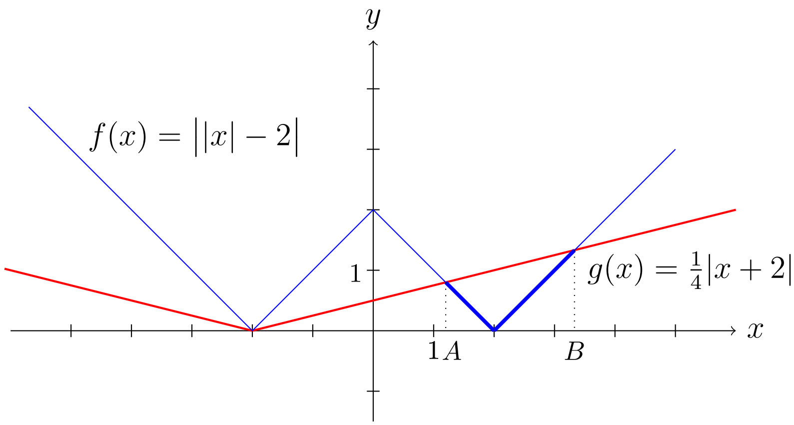




Zdaj narišimo oba grafa v istem koordinatnem sistemu. Neenakost $\big||x|-2\big| < \frac{1}{4}|x+2|$ velja natanko za tiste vrednosti x, za katere leži graf funkcije $y = \big||x|-2\big|$ pod grafom funkcije $y = \frac{1}{4}|x+2|$. Iz slike na naslednji strani je razvidno, da je to interval (A, B). Poiščimo koordinate točk A in B.

- Točka A: $\frac{1}{4}(x+2) = -x+2$, od koder dobimo $x = \frac{6}{5}$.
- Točka B: $\frac{1}{4}(x+2) = x-2$, od koder dobimo $x = \frac{10}{3}$.

Rešitev dane neenačbe je torej interval $(\frac{6}{5}, \frac{10}{3})$.



Poiščimo zdaj še tak a, da bo rešitev neenačbe $\big||x| - 2\big| < \frac{1}{a}|x + 2|$ interval $(1, 4)$. Povečati moramo torej naklon desnega poltraka grafa funkcije $y = \frac{1}{4}\,|x + 2|$, tako da se bo točka A premaknila malo na levo in bo imela x-koordinato 1, in da se bo točka B premaknila malo na desno in bo imela x-koordinato 4. To pomeni, da ima enačba $\frac{1}{a}(x + 2) = -x + 2$ rešitev $x = 1$ in enačba $\frac{1}{a}(x + 2) = x - 2$ rešitev $x = 4$. Iz obeh pogojev dobimo rešitev $a = 3$.

2. način
Dano neenačbo lahko rešimo tudi brez risanja skice. Poiščimo točke, v katerih so izrazi pod znakom absolutne vrednosti enaki 0: $|x| = 0$ velja, kadar je $x = 0$, $|x| - 2 = 0$ velja, kadar je $|x| = 2$ oziroma $x = \pm 2$ in $x + 2 = 0$ velja kadar je $x = -2$. Dobljene točke $x = -2, x = 0$ in $x = 2$ razdelijo številsko premico na intervale, na katerih lahko odpravimo absolutne vrednosti.

1. primer: Predpostavimo, da velja $x \leq -2$. Potem je $|x| = -x$ in

$$\big||x| - 2\big| = |-x - 2| = -x - 2,$$

saj je na danem intervalu $-x - 2 \geq 0$. Ker je na danem intervalu $x + 2 \leq 0$, velja $|x + 2| = -x - 2$. Neenačbo (4) lahko torej zapišemo kot $-x - 2 < \frac{1}{4}(-x - 2)$. Rešitev dobljene neenačbe je $x > -2$, njen presek s predpostavko pa je očitno prazna množica: $I_1 = \varnothing$.

2. primer: Predpostavimo, da velja $-2 < x \leq 0$. Potem je $|x| = -x$ in

$$\big||x| - 2\big| = |-x - 2| = x + 2,$$

saj je na danem intervalu $-x - 2 \leq 0$. Ker je na danem intervalu $x + 2 \geq 0$, velja $|x + 2| = x + 2$. Neenačbo (4) lahko torej zapišemo kot $x + 2 < \frac{1}{4}(x + 2)$. Rešitev dobljene neenačbe je $x < -2$, njen presek s predpostavko pa je očitno spet prazna množica: $I_2 = \varnothing$.

3. primer: Predpostavimo, da velja $0 < x \leq 2$. Potem je $|x| = x$ in

$$\big||x| - 2\big| = |x - 2| = -x + 2,$$

saj je na danem intervalu $x - 2 \leq 0$. Ker je na danem intervalu $x + 2 \geq 0$, velja $|x + 2| = x + 2$. Neenačbo (4) lahko torej zapišemo kot $-x + 2 < \frac{1}{4}(x + 2)$. Rešitev dobljene neenačbe je $x > \frac{6}{5}$, njen presek s predpostavko pa je $I_3 = (\frac{6}{5}, 2]$.

4. primer: Predpostavimo, da velja $x > 2$. Potem je $|x| = x$ in

$$\big||x| - 2\big| = |x - 2| = x - 2,$$

saj je na danem intervalu $x - 2 \geq 0$. Ker je na danem intervalu $x + 2 \geq 0$, velja $|x + 2| = x + 2$. Neenačbo (4) lahko torej zapišemo kot $x - 2 < \frac{1}{4}(x + 2)$. Rešitev dobljene neenačbe je $x < \frac{10}{3}$, njen presek s predpostavko pa je $I_4 = (2, \frac{10}{3})$.

Rešitev neenačbe (4) je $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = (\frac{6}{5}, \frac{10}{3})$. Reševanje naloge nadaljujemo kot v 1. načinu.

7. (4. izpit, 28.8.2017) Določite definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sqrt{|1 - x| - x^2 + 1}\,.$$

Rešitev: Funkcija $f(x)$ je definirana, kadar je

$$|1 - x| - x^2 + 1 \geq 0. \tag{5}$$

Rešiti moramo dobljeno neenačbo z absolutno vrednostjo. Neenačbo bomo rešili na dva načina:

1. način
Izraz pod znakom absolutne vrednosti je $1 - x$, in je enak 0, če je $x = 1$. Zato ločimo dva primera.

1. primer: Predpostavimo, da velja $x \geq 1$. Potem je $1 - x \leq 0$ in zato je

$$|1 - x| = -(1 - x) = -1 + x.$$

Neenačbo (5) prepišemo v obliko $-1 + x - x^2 + 1 \geq 0$, ki se poenostavi v $x - x^2 \geq 0$ ali $x(1 - x) \geq 0$. Ker iz predpogoja sledi, da je $1 - x \leq 0$, mora biti tudi $x \leq 0$. Presek dobljenega intervala s predpostavko je $I_1 = \varnothing$.

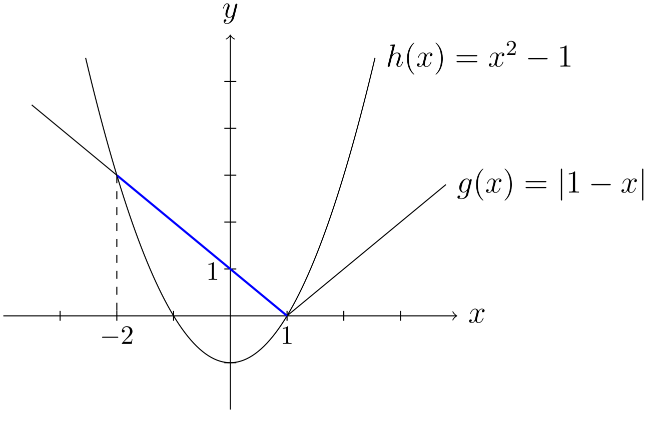
2. primer: Predpostavimo, da velja $x \leq 1$. Potem je $1 - x \geq 0$ in zato je

$$|1 - x| = 1 - x.$$

Neenačbo (5) prepišemo v obliko $1 - x - x^2 + 1 \geq 0$, ki se poenostavi v $x^2 + x - 2 \leq 0$ oziroma $(x + 2)(x - 1) \leq 0$. Rešitev kvadratne neenačbe je interval $[-2, 1]$. Presek dobljenega intervala s predpostavko je interval $I_2 = [-2, 1]$.

Rešitev neenačbe (5) je $I_1 \cup I_2 = [-2, 1]$. Zato je $D_f = [-2, 1]$.

2. način
Neenačbo (5) prepišemo v $|1 - x| \geq x^2 - 1$. Neenačba velja za tiste vrednosti x, za katere graf funkcije $g(x) = |1 - x|$ leži nad grafom funkcije $h(x) = x^2 - 1$. Narišemo oba grafa:



Iz slike je razvidno, da je rešitev dane neenačbe interval $[-2, 1]$. Točko $x = -2$, v kateri parabola $y = x^2 - 1$ seka premico $y = 1 - x$, dobimo kot rešitev kvadratne enačbe $x^2 - 1 = 1 - x$.

2 Indukcija

8. (1. kolokvij, 1.12.2014) Z matematično indukcijo pokažite, da je izraz oblike $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ deljiv z 9 za vsak $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Rešitev: Dokazati je treba, da za vsak $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ velja

$$10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9z, \text{ za nek } z \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Naj bo $n = 0$. Izraz na levi strani enakosti v (6) ima vrednost $10^0 + 3 \cdot 4^2 + 5 = 9 \cdot 6$ in je očitno deljiv z 9.
Indukcijskega koraka se lahko lotimo na dva načina:

1. način
Indukcijska predpostavka pove, da je trditev (6) pravilna na primer pri $n = k$ $(k \geq 0)$, torej obstaja neko celo število a, da je

$$10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 9a. \tag{7}$$

Potrebno je pokazati, da trditev (6) velja tudi pri $n = k + 1$, torej da obstaja neko celo število b, za katero velja enakost

$$10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 = 9b.$$

Če levo stran zadnje enakosti malo preoblikujemo, dobimo:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 &= 10 \cdot 10^k + 3 \cdot 4 \cdot 4^{k+2} + 5 \\ &= (9+1) \cdot 10^k + 3 \cdot (3+1)4^{k+2} + 5 \\ &= 9 \cdot 10^k + 10^k + 3 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 \\ &= 9 \cdot \left(10^k + 4^{k+2}\right) + 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5. \end{aligned}$$

Prvi člen je deljiv z 9, saj je število $10^k + 4^{k+2}$ celo (ker je k naravno število). Drugi člen pa je deljiv z 9 zaradi indukcijske predpostavke (7). Ker je vsota dveh večkratnikov števila 9 tudi sama večkratnik števila 9, smo dokazali, da trditev velja tudi pri $n = k + 1$.

2. način
Indukcijsko predpostavko (7) lahko zapišemo malo drugače:

$$5 = 9a - 10^k - 3 \cdot 4^{k+2} \text{ za nek } a \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Spet dokazujemo pravilnost trditve pri $n = k+1$, torej da obstaja neko celo število b, za katero velja enakost

$$10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 = 9b. \tag{9}$$

Z uporabo indukcijske predpostavke (8), lahko levo stran enakosti (9) preoblikujemo:

$$\begin{aligned}10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 = 10 \cdot 10^k + 3 \cdot 4 \cdot 4^{k+2} + 9a - 10^k - 3 \cdot 4^{k+2} = \\ 9a + 9 \cdot 10^k + 3 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} = 9 \cdot \left(a + 10^k + 4^{k+2}\right).\end{aligned}$$

Ker je a celo število, k pa naravno, je tudi $a + 10^k + 4^{k+2}$ celo število. Trditev drži torej tudi pri $n = k+1$.
Po principu matematične indukcije smo s tem pokazali, da trditev velja za vsa števila n iz množice $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

9. (1. kolokvij, 23.11.2015) S pomočjo matematične indukcije pokažite, da za vsako naravno število n velja

$$2 + 10 + 24 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1).$$

Rešitev: Pri $n = 1$ se naša trditev glasi $2 = 1^2 \cdot 2$, torej baza indukcije stoji.
Predpostavimo, da za nek $n = k$ $(k \geq 1)$ velja

$$2 + 10 + 24 + \ldots + k(3k-1) = k^2(k+1).$$

Pokažimo zdaj, da za $n = k+1$ velja

$$2 + 10 + 24 + \ldots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)^2(k+2). \tag{10}$$

Na prvih k členih leve strani enakosti (10) bomo uporabili indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned}2 + 10 + 24 + \ldots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) &= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) \\ &= (k+1)(k^2 + 3k + 2) \\ &= (k+1)(k+1)(k+2) \\ &= (k+1)^2(k+2).\end{aligned}$$

Torej trditev drži tudi za $n = k+1$. Po principu matematične indukcije smo s tem pokazali, da trditev velja za vsa naravna števila n.

3 Kompleksna števila

10. (3. izpit, 9.6.2014) Naj bo A množica vseh kompleksnih števil, ki zadoščajo enačbi $2|z| = |z - 3i|$. Skicirajte jo v kompleksni ravnini. Pokažite, da množica A vsebuje natanko dve realni števili in poiščite razdaljo med njima.

Rešitev: Število z zapišimo v obliki $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Potem je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z - 3i = x + (y - 3)i$ in $|z - 3i| = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$. Zato lahko dano enačbo zapišemo kot

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}. \tag{11}$$

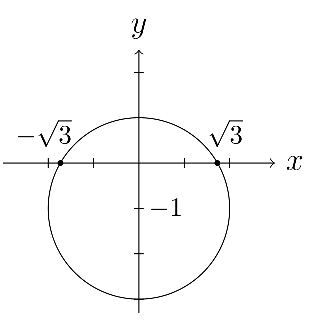
Ker je za nenegativni števili a in b enakost $a = b$ ekvivalentna enakosti $a^2 = b^2$, lahko enačbo (11) kvadriramo in tako dobimo ekvivalentno enačbo

$$4(x^2 + y^2) = x^2 + (y - 3)^2.$$

Dobljeno enačbo zapišemo kot $3x^2 + 3(y^2 + 2y - 3) = 0$ oziroma $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$. Vsoto $y^2 + 2y$ dopolnimo do popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned} &x^2 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 3 = 0, \\ &x^2 + (y + 1)^2 = 4. \end{aligned}$$

Dobili smo enačbo krožnice polmera $r = 2$ s središčem v točki $(0, -1)$. Torej množica A predstavlja dobljeno krožnico.



Kompleksno število $z = x + iy$ je realno, če je $y = 0$. Zato vsa realna števila, ki so vsebovana v množici A, dobimo tako, da v dobljeno enačbo krožnice vstavimo $y = 0$. Dobimo enačbo $x^2 + 1 = 4$, ki ima dve rešitvi $x_1 = -\sqrt{3}$ in $x_2 = \sqrt{3}$. Torej množica A vsebuje dve realni števili: $-\sqrt{3}$ in $\sqrt{3}$. Grafično gledano, govorimo o presečiščih krožnice z realno osjo. Razdalja med njima je razdalja med točkama $(-\sqrt{3}, 0)$ in $(\sqrt{3}, 0)$ in je enaka $2\sqrt{3}$.

11. (1. izpit, 29.1.2015) Določite množico tistih kompleksnih števil, za katere velja

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 4.$$

Narišite to množico v kompleksni ravnini.

Rešitev: Pomnožimo dano enačbo z $|z-i|$. Dobimo $|z+i| = 4|z-i|$. Ker $z = i$ ni rešitev dobljene enačbe, je le-ta ekvivalentna začetni. Zapišimo število z kot $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$, in prepišemo enačbo v obliko

$$|x + i(y+1)| = 4|x + i(y-1)|.$$

Po definiciji absolutne vrednosti kompleksnega števila to lahko zapišemo kot

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4\sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

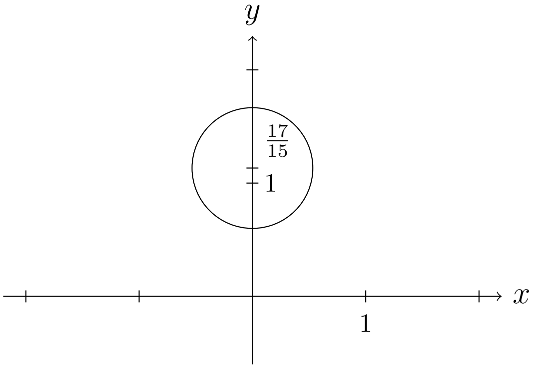
Ker je za nenegativni števili a in b enakost $a = b$ ekvivalentna enakosti $a^2 = b^2$, lahko zgornjo enačbo kvadriramo in tako dobimo ekvivalentno enačbo

$$x^2 + (y+1)^2 = 16(x^2 + (y-1)^2).$$

Dobljeno enačbo lahko zapišemo kot $15x^2 + 15y^2 - 34y + 15 = 0$. Zdaj enačbo delimo s 15 in nato dopolnimo vsoto $y^2 - \frac{34}{15}y$ do popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - \frac{34}{15}y + 1 &= 0, \\
x^2 + \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{17}{15} + \left(\frac{17}{15}\right)^2\right) - \left(\frac{17}{15}\right)^2 + 1 &= 0, \\
x^2 + \left(y - \frac{17}{15}\right)^2 = \frac{64}{225} &= \left(\frac{8}{15}\right)^2.
\end{aligned}$$

Dobili smo enačbo krožnice polmera $r = \frac{8}{15}$ s središčem v točki $(0, \frac{17}{15})$.



12. (3. izpit, 15.6.2015) Poiščite in v kompleksni ravnini narišite točke, za katere velja

$$|z - 3i| = 2|z| \text{ in } \operatorname{Im}(z) = -2.$$

Rešitev: Zapišimo število z v obliki $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$, in upoštevajmo, da je $y = -2$. Prepišimo dano enačbo v obliko

$$|x + i(-2 - 3)| = 2|x - 2i|.$$

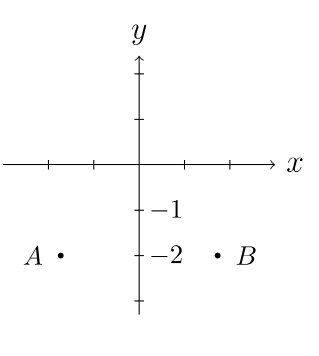
Po definiciji absolutne vrednosti kompleksnega števila to lahko zapišemo kot

$$\sqrt{x^2 + (-5)^2} = 2\sqrt{x^2 + (-2)^2}.$$

Ker je za nenegativni števili a in b enakost $a = b$ ekvivalentna enakosti $a^2 = b^2$, lahko zgornjo enačbo kvadriramo in tako dobimo ekvivalentno enačbo

$$x^2 + 25 = 4(x^2 + 4).$$

Dobljena enačba se poenostavi v $x^2 = 3$. Torej imamo dve rešitvi $x_1 = \sqrt{3}$ in $x_2 = -\sqrt{3}$. Ugotovili smo, da obstajata le dve točki, ki zadoščata obema pogojema: $A(-\sqrt{3}, -2)$ in $B(\sqrt{3}, -2)$.



13. (1. kolokvij, 23.11.2015) Dani sta kompleksni števili $z_1 = 1-\sqrt{3}i$ in $z_2 = 1+i$.

(a) Izračunajte $\frac{z_1 - z_2}{z_2}$.

(b) Zapišite z_1 in z_2 v polarni obliki.

(c) Izračunajte $\frac{z_1^{12}}{z_2^{12}}$.

Rešitev:

(a) Števec in imenovalec ulomka pomnožimo s številom, ki je konjugirano imenovalcu: $\overline{z_2} = 1 - i$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1 - z_2}{z_2} &= \frac{i(-\sqrt{3}-1)}{1+i} = \frac{i(-\sqrt{3}-1)}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \\
&= \frac{-\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1)}{2} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Spomnimo se, da je polarna oblika kompleksnega števila $z = a+bi \neq 0$ definirana kot $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kjer je $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ in $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Zadnja dva pogoja enolično določata kot $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$, za katerega velja $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Izračunajmo absolutno vrednost $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$. Za $\varphi = \mathrm{Arg}(z_1)$ je $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ in $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Torej je

$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Polarna oblika števila z_1 je

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Za število z_2 velja: $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Za $\psi = \mathrm{Arg}(z_2)$ velja $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Torej je $\psi = \frac{\pi}{4}$. Polarna oblika števila z_2 je

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

(c) Vrednost izraza $\frac{z_1^{12}}{z_2^{12}}$ bomo izračunali na dva načina.

1. način
Po formuli za potenciranje kompleksnega števila v polarni obliki dobimo:

$$\begin{aligned}
z_1^{12} &= 2^{12}\left(\cos\frac{12\cdot 5\pi}{3}+i\sin\frac{12\cdot 5\pi}{3}\right) = 2^{12}\left(\cos(20\pi)+i\sin(20\pi)\right)\\
&= 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12},\\
z_2^{12} &= \sqrt{2}^{12}\left(\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}\right) = 2^6(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi))\\
&= 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^6.
\end{aligned}$$

Zato velja

$$\frac{z_1^{12}}{z_2^{12}} = \frac{2^{12}}{-2^6} = -2^6 = -64.$$

2. način
Najprej uporabimo formulo za deljenje kompleksnih števil v polarni obliki:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

Zdaj uporabimo še formulo za potenciranje kompleksnega števila v polarni obliki:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1^{12}}{z_2^{12}} &= \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)\right)^{12}\\
&= \sqrt{2}^{12}\left(\cos(17\pi)+i\sin(17\pi)\right) = 2^6(\cos\pi+i\sin\pi) = -2^6 = -64.
\end{aligned}$$

14. (2. izpit, 11.2.2016) Določite množico vseh kompleksnih števil, za katera velja enakost

$$|z-1| = |2z+1|$$

in jo narišite v kompleksni ravnini.

Rešitev: Zapišimo število z v obliki $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Potem je $z - 1 = (x-1) + iy$, $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $2z + 1 = (2x+1) + iy$ in $|2z+1| = \sqrt{(2x+1)^2 + y^2}$. Zato lahko dano enačbo zapišemo kot

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(2x+1)^2 + (2y)^2}. \tag{12}$$

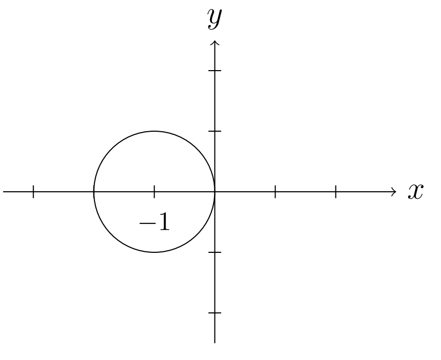
Ker je za nenegativni števili a in b enakost $a = b$ ekvivalentna enakosti $a^2 = b^2$, lahko enačbo (12) kvadriramo in tako dobimo ekvivalentno enačbo

$$(x-1)^2 + y^2 = (2x+1)^2 + (2y)^2.$$

Dobljeno enačbo lahko zapišemo kot $3x^2 + 3y^2 + 6x = 0$ oziroma $x^2 + 2x + y^2 = 0$. Vsoto $x^2 + 2x$ dopolnimo do popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 1) - 1 + y^2 &= 0, \\ (x+1)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Dobili smo enačbo krožnice polmera $r = 1$ s središčem v točki $(-1, 0)$.



15. (3. izpit, 13.6.2016) Poiščite vse rešitve enačbe

$$\mathrm{Re}(z + iz) + z\bar{z} = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

in jih narišite v kompleksni ravnini. Naredite isto še za enačbo $\mathrm{Im}(2z - iz) = 1$. Določite vsa kompleksna števila, ki zadoščajo obema enačbama.

Rešitev: Zapišimo število z v obliki $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Potem je $z + iz = x + iy + i(x + iy) = (x - y) + i(x + y)$ in tako je $\mathrm{Re}(z + iz) = x - y$. Produkt

$z\overline{z}$ je enak $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$. Torej lahko enačbo $\mathrm{Re}(z+iz)+z\overline{z}=0$ zapišemo kot $x-y+x^2+y^2=0$ oziroma $x^2+x+y^2-y=0$. Dopolnimo vsakega od izrazov x^2+x in y^2-y do popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned}\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} &= 0,\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dobili smo enačbo krožnice polmera $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ s središčem v točki $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Za reševanje druge enačbe najprej izračunamo

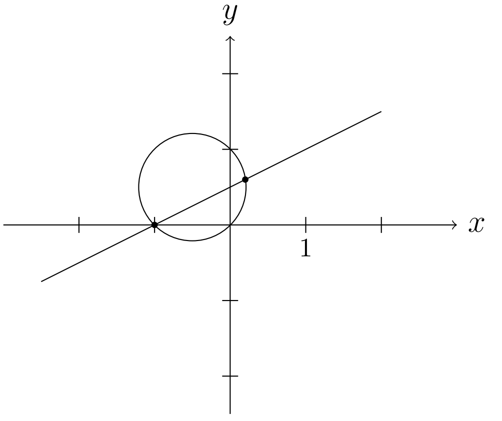
$$2z-iz = 2(x+iy)-i(x+iy) = (2x+y)+i(2y-x).$$

Zato je $\mathrm{Im}(2z-iz)=2y-x$ in enačbo lahko zapišemo kot $2y-x=1$. To je enačba premice, ki gre skozi točki $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ in $(-1,0)$.

Poiščimo še vsa kompleksna števila, ki rešijo obe enačbi. Iz enačbe premice izrazimo $x=2y-1$ in vstavimo ta nastavek za x v enačbo krožnice:

$$\begin{aligned}\left(2y-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2},\\ \left(2y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2},\\ 4y^2-2y+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4} &= \frac{1}{2},\\ 5y^2-3y &= 0,\\ y(5y-3) &= 0.\end{aligned}$$

Zadnja enačba ima dve rešitvi: $y_1=0$ in $y_2=\frac{3}{5}$. Če ju vstavimo v nastavek za x, dobimo $x_1=2\cdot 0-1=-1$ in $x_2=2\cdot\frac{3}{5}-1=\frac{1}{5}$. Obstajata torej dve kompleksni števili, ki sta rešitvi danih dveh enačb: $z_1=x_1+iy_1$ in $z_2=x_2+iy_2$ oziroma $z_1=-1+i\cdot 0=-1$ in $z_2=\frac{1}{5}+i\frac{3}{5}$. Grafično gledano, govorimo o dveh presečiščih krožnice in premice.



16. (1. kolokvij, 5.12.2016) Poiščite vsa kompleksna števila z, za katera velja:

$$\sqrt{2}\,z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{21} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rešitev: Najprej poenostavimo desno stran enačbe tako, da zapišemo kompleksno število $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ v polarni obliki in uporabimo formulo za potenciranje kompleksnega števila v polarni obliki. Izračunamo: $r = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zato imamo $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ in posledično

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

Zdaj lahko število potenciramo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{21} &= \cos\frac{21\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{21\cdot 7\pi}{4} = \cos\frac{147\pi}{4} + i\sin\frac{147\pi}{4} \\
&= \cos\left(36\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(36\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Dano enačbo lahko torej zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}z^2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\sqrt{2}z^2 &= i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\
z^2 &= \frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

Dobljeno enačbo rešujemo tako, da iščemo z v obliki $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Potem je $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ in zato lahko enačbo zapišemo kot

$$x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{i}{2}.$$

V dobljeni enačbi izenačimo realni in imaginarni del kompleksnih števil na levi in na desni strani:

$$x^2 - y^2 = 0, \;\; 2xy = \frac{1}{2}.$$

Iz druge dobljene enačbe izrazimo $y = \frac{1}{4x}$ (in pred tem opazimo, da $x = 0$ ni rešitev druge enačbe in zato smemo deliti z x), in vstavimo dobljen izraz v prvo enačbo:

$$x^2 - \frac{1}{16x^2} = 0.$$

Če zadnjo enačbo pomnožimo s $16x^2$, dobimo $16x^4 - 1 = 0$, torej je $x^4 = \frac{1}{16}$. Dobljena enačba ima dve rešitvi $x_1 = \frac{1}{2}$ in $x_2 = -\frac{1}{2}$. Vstavimo dobljeni vrednosti v nastavek za y in dobimo $y_1 = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}$. Začetna enačba ima torej dve rešitvi

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \;\; \text{in} \;\; z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

17. (4. izpit, 28.8.2017) Poiščite vsa kompleksna števila, ki zadoščajo enačbama

$$|z + 1 - 2i| = |z - 1| \;\; \text{in} \;\; 2\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z).$$

Rešitev: Zapišemo število z v obliki $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Potem je $z + 1 - 2i = (x + 1) + i(y - 2)$ in tako je

$$|z + 1 - 2i| = |(x + 1) + i(y - 2)| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}.$$

Na podoben način izračunamo še $|z-1| = |(x-1)+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Zato je prva od podanih enačb ekvivalentna enačbi

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + y^2. \tag{13}$$

Ker je $\mathrm{Im}(z) = y$ in $\mathrm{Re}(z) = x$, lahko drugo enačbo $2\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ zapišemo kot $2y = x$. Ko vstavimo $x = 2y$ v (13), dobimo

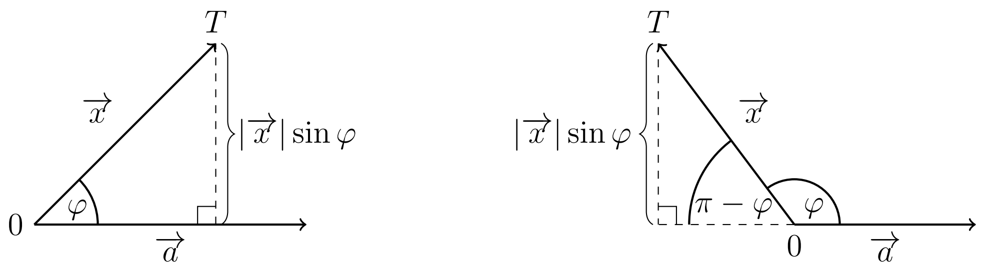
$$(2y+1)^2 + (y-2)^2 = (2y-1)^2 + y^2.$$

Rešitev dobljene enačbe je $y = -1$. Torej je $x = -2$. Zato je $z = -2 - i$ edino kompleksno število, ki zadošča obema podanima enačbama.

4 Vektorji

18. (1. kolokvij, 25.11.2013) Poiščite vse vektorje $\overrightarrow{x}$, ki zadoščajo enačbi $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x}| = 1$, kjer je $\overrightarrow{a}$ dan vektor. Ali za kakšen vektor $\overrightarrow{a}$ enačba nima rešitve?

Rešitev: Enačba očitno ni rešljiva, če je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Predpostavimo, da je $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Uporabimo formulo $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{x}| \sin\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{x}$. Prepišimo dano enačbo v $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{x}| \sin\varphi = 1$ oziroma $|\overrightarrow{x}| \sin\varphi = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}$.



Leva slika predstavlja primere, ko je φ oster kot. Če uporabimo definicijo sinusa, nam slika pove, da je rešitev enačbe $\overrightarrow{x}$ krajevni vektor točke T, ki je za $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}$ oddaljena od nosilke vektorja $\overrightarrow{a}$. Desna slika predstavlja primere, ko je φ topi kot. Ker je $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$ je tudi tukaj rešitev enačbe $\overrightarrow{x}$ krajevni vektor točke T, ki je za $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}$ oddaljena od nosilke vektorja $\overrightarrow{a}$. Rešitev dane enačbe so krajevni vektorji točk, ki ležijo na plašču valja s polmerom $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}$, ki se razteza vzdolž nosilke vektorja $\overrightarrow{a}$. Enačba je torej nerešljiva le za ničelni vektor $\overrightarrow{a}$.

19. (4. izpit, 1.9.2014)

(a) Izračunajte kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, če je

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y},\ |\overrightarrow{x}| = 2|\overrightarrow{y}| \text{ in } \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}.$$

(b) Izrazite ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, z dolžino vektorja $\overrightarrow{y}$.

Rešitev:

(a) Za izračun kota med vektorjema lahko uporabimo definicijo skalarnega produkta, po kateri je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,$$

kjer je φ iskani kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Pri izračunu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$ in $|\vec{b}|$ bomo uporabili enakosti

$$\begin{aligned}
&\vec{x} \cdot \vec{y} = 0\,(\text{saj } \vec{x} \perp \vec{y}),\\
&\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2 = 4\,|\vec{y}|^2 \text{ in}\\
&\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}.
\end{aligned}$$

Skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ je enak

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{x} + 2\vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})\\
&= \vec{x} \cdot \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{y} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} - 2\vec{y} \cdot \vec{y}\\
&= 4\,|\vec{y}|^2 - 2\,|\vec{y}|^2\\
&= 2\,|\vec{y}|^2\,.
\end{aligned}$$

Izračunajmo dolžini vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{x} + 2\vec{y}) \cdot (\vec{x} + 2\vec{y})\\
&= \vec{x} \cdot \vec{x} + 4\vec{x} \cdot \vec{y} + 4\vec{y} \cdot \vec{y} = 4\,|\vec{y}|^2 + 4\,|\vec{y}|^2 = 8\,|\vec{y}|^2\,,\\
|\vec{a}| &= 2\sqrt{2}\,|\vec{y}|\,,\\
|\vec{b}|^2 &= \vec{b} \cdot \vec{b} = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})\\
&= \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = 4\,|\vec{y}|^2 + |\vec{y}|^2 = 5\,|\vec{y}|^2\,,\\
|\vec{b}| &= \sqrt{5}\,|\vec{y}|\,.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2\,|\vec{y}|^2}{2\sqrt{2}\,|\vec{y}|\,\sqrt{5}\,|\vec{y}|} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Iskani kot je $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(b) Ploščino paralelograma bomo izrazili na dva načina.

1. način

Ploščino P paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, lahko izračunamo s pomočjo vektorskega produkta:

$$P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi, \tag{14}$$

kjer je φ kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, ki smo ga izračunali v točki (a). Ker vemo, da je $\varphi \in [0, \pi]$ je $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$. Ker je $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{10}$, lahko izraz za $\sin\varphi$ poenostavimo:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Če v formulo (14) vstavimo vse podatke, dobimo

$$P = 2\sqrt{2}\,|\overrightarrow{y}|\,\sqrt{5}\,|\overrightarrow{y}|\,\frac{3\sqrt{10}}{10} = 6\,|\overrightarrow{y}|^2\,.$$

2. način
Uporabimo enakosti $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$, $|\overrightarrow{x}| = 2|\overrightarrow{y}|$ in $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$ in dobimo

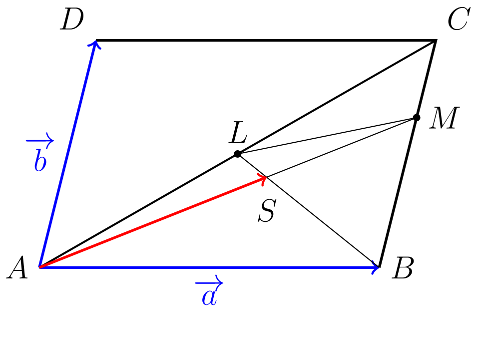
$$\begin{aligned} P &= |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |(\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y}) \times (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})| \\ &= |\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} - 2\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{y}| \\ &= |-2\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}| = 3|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}| \\ &= 3|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\sin\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 2|\overrightarrow{y}||\overrightarrow{y}| = 6|\overrightarrow{y}|^2. \end{aligned}$$

20. (1. izpit, 28.1.2016) V paralelogramu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Naj bo točka L razpolovišče diagonale AC in točka M naj deli stranico BC v razmerju $2:1$.

    (a) Naj bo S presečišče daljic AM in BL. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

    (b) Naj bo $|\overrightarrow{b}| = 1$, $|\overrightarrow{a}| = 2$ in $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi/3$. Poiščite dolžino vektorja $\overrightarrow{LM}$.

Rešitev:



(a) Najprej na dva načina izrazimo vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS} &= \lambda\overrightarrow{AM} = \lambda\left(\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) = \lambda\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{b}, \\
\overrightarrow{AS} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{LB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \mu\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu\right)\overrightarrow{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu\right)\overrightarrow{b}.
\end{aligned}$$

Ker sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna, se vektor $\overrightarrow{AS}$ enolično izraža kot njuna linearna kombinacija. Torej veljata enačbi

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu \quad \text{in} \quad \frac{2}{3}\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu.$$

Če nastavek za λ iz prve enačbe vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu,$$

od koder sledi $\mu = \frac{1}{5}$. Torej je

$$\overrightarrow{AS} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)\overrightarrow{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)\overrightarrow{b} = \frac{3}{5}\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{b}.$$

(b) Najprej zapišimo

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{6}\overrightarrow{b}.$$

Uporabimo enakosti

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} &= |\overrightarrow{a}|^2 = 4, \\
\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} &= |\overrightarrow{b}|^2 = 1, \\
\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} \text{ in} \\
\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi = 2\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1,
\end{aligned}$$

da izračunamo kvadrat dolžine vektorja $\overrightarrow{LM}$:

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{LM}\right|^2 &= \overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{LM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{6}\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{6}\overrightarrow{b}\right) \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} + 2\cdot\frac{1}{12}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + \frac{1}{36}\overrightarrow{b}\overrightarrow{b} = \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{43}{36}.
\end{aligned}$$

Dolžina vektorja $\overrightarrow{LM}$ je tako enaka $\frac{\sqrt{43}}{6}$.

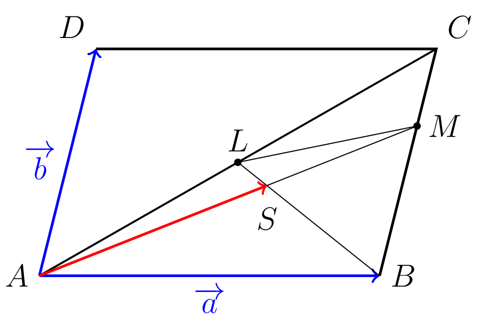
21. (4. izpit, 5.9.2016) V paralelogramu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Naj bo točka L razpolovišče diagonale AC in točka M naj deli stranico BC v razmerju $2:1$.

    (a) Poiščite razmerje med ploščino trikotnika BML in ploščino paralelograma $ABCD$.

    (b) Naj bo S presečišče daljic AM in BL. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

    (c) Naj bo $|\overrightarrow{b}| = 1$, $|\overrightarrow{a}| = 2$ in $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi/3$. Poiščite dolžino vektorja $\overrightarrow{LM}$.

Rešitev:



(a) Ploščini izrazimo s pomočjo dolžine vektorskega produkta in pri tem uporabimo enakost $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$:

$$\begin{aligned} P_{BML} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{BL} \times \overrightarrow{BM}| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) \times \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{3}\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b}\right| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|, \\ P_{ABCD} &= |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|. \end{aligned}$$

Razmerje med ploščinama je

$$P_{BML} : P_{ABCD} = \frac{\frac{1}{6}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|} = 1:6.$$

(b) Glej rešitev naloge 20(a).

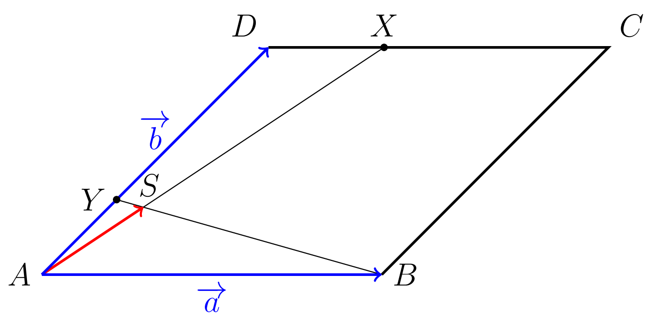
(c) Glej rešitev naloge 20(b).

22. (1. kolokvij, 5.12.2016) V paralelogramu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Naj točka X deli stranico CD v razmerju $2:1$ in točka Y deli stranico AD v razmerju $1:2$.

    (a) Naj bo S presečišče daljic AX in BY. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

    (b) Naj bo $|\overrightarrow{a}| = 6$, $|\overrightarrow{b}| = 3$ in $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi/3$. Poiščite dolžino vektorja $\overrightarrow{YX}$ in ploščino trikotnika AXY.

Rešitev:



(a) Vektor $\overrightarrow{AS}$ na dva načina izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AX} = \lambda\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b},$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{a} + \mu\left(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}\right) = (1-\mu)\,\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\mu\overrightarrow{b}.$$

Ker sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna, se vektor $\overrightarrow{AS}$ enolično izraža kot njuna linearna kombinacija. Torej

$$\frac{1}{3}\lambda = 1-\mu \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{1}{3}\mu.$$

Ko rešimo sistem enačb, dobimo $\mu = \frac{9}{10}$. Tako je

$$\overrightarrow{AS} = \left(1 - \frac{9}{10}\right)\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}\overrightarrow{b} = \frac{1}{10}\overrightarrow{a} + \frac{3}{10}\overrightarrow{b}.$$

(b) Iz slike je razvidno, da je $\overrightarrow{YX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}$. Kvadrat dolžine vektorja $\overrightarrow{YX}$ izračunamo s pomočjo skalarnega produkta:

$$|\overrightarrow{YX}|^2 = \overrightarrow{YX} \cdot \overrightarrow{YX} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) =$$
$$\frac{1}{9}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + \frac{4}{9}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \frac{4}{9}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}. \quad (15)$$

Iz podatkov naloge sledijo enakosti:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} &= |\overrightarrow{a}|^2 = 36, \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} &= |\overrightarrow{b}|^2 = 9 \quad \text{in} \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi = 6 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 9. \end{aligned}$$

Če enakosti uporabimo v enačbi (15), dobimo

$$|\overrightarrow{YX}|^2 = \frac{1}{9} \cdot 36 + \frac{4}{9} \cdot 9 + \frac{4}{9} \cdot 9 = 12.$$

Dolžina vektorja $\overrightarrow{YX}$ je tako enaka $2\sqrt{3}$.
Ploščino trikotnika AXY izračunamo s pomočjo dolžine vektorskega produkta, kjer uporabimo enakost $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$:

$$\begin{aligned} P_{AXY} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AX} \times \overrightarrow{AY}| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \frac{1}{3}\overrightarrow{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{9}\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b}\right| \\ &= \frac{1}{18}\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \frac{1}{18}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi = \frac{1}{18} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

5 Analitična geometrija

23. (1. izpit, 23.1.2014) Dani sta premici

$$p\colon x-4=\frac{3-y}{2}=\frac{z+1}{c} \quad \text{in} \quad q\colon \frac{5-x}{2}=y-7=\frac{z+11}{2}.$$

(a) Določite c tako, da bosta smerna vektorja premic pravokotna.

(b) Pokažite, da se za tako dobljeni c premici sekata in poiščite presečišče.

(c) Poiščite ravnini, ki sta vzporedni premicama p in q ter sta od njiju oddaljeni za 3 enote.

Rešitev: Iz enačbe premice p lahko razberemo, da je njen smerni vektor $\overrightarrow{s_p}=(1,-2,c)$ in da na njej leži točka $P(4,3,-1)$. Na enak način iz enačbe premice q določimo $\overrightarrow{s_q}=(-2,1,2)$ in točko $Q(5,7,-11)$, ki leži na njej.

(a) Premici p in q bosta pravokotni, če bosta pravokotna njuna smerna vektorja. Vektorja pa sta pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0. Torej velja

$$\overrightarrow{s_p}\cdot\overrightarrow{s_q}=(1,-2,c)\cdot(-2,1,2)=-2-2+2c=0$$

in zato je $c=2$.

(b) Enačbi premic zapišemo v parametrični obliki:

$$p\colon x=4+\alpha,\ y=3-2\alpha,\ z=-1+2\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},$$

$$q\colon x=5-2\beta,\ y=7+\beta,\ z=-11+2\beta,\ \beta\in\mathbb{R},$$

kjer sta α in β različna parametra.
Če se premici p in q sekata, mora biti rešljiv sistem enačb

$$\begin{aligned} 4+\alpha &= 5-2\beta,\\ 3-2\alpha &= 7+\beta,\\ -1+2\alpha &= -11+2\beta. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb sledi, da je $\alpha=-3$ in $\beta=2$. Ker izračunani vrednosti zadostita tudi tretji enačbi, je sistem enolično rešljiv. Če $\alpha=-3$ vstavimo v parametrično enačbo premice p, dobimo

$$x=4+(-3)=1,\ y=3-2(-3)=9,\ z=-1+2(-3)=-7,$$

kar so koordinate presečišča premic, točke $A(1, 9, -7)$. Seveda dobimo isto točko, če vstavimo $\beta = 2$ v enačbo premice q.

(c) Najprej določimo normalni vektor ravnine Σ, v kateri ležita premici p in q. Normalni vektor ravnine je pravokoten na $\overrightarrow{s_p}$ in na $\overrightarrow{s_q}$, torej je vzporeden njunemu vektorskemu produktu:

$$\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6, -6, -3) = -3 \cdot (2, 2, 1).$$

Ravnini, ki sta vzporedni ravnini Σ, in sta od nje oddaljeni za 3 enote, označimo s Π_1 in Π_2. Njuni normali že poznamo, saj lahko vzamemo npr. $\overrightarrow{n} = (2, 2, 1)$. Potrebujemo še točki $A_1 \in \Pi_1$ in $A_2 \in \Pi_2$, ki ležita na njima. Dobimo ju tako, da krajevnemu vektorju točke A prištejemo oziroma odštejemo vektor dolžine 3 v smeri vektorja $\overrightarrow{n}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_{A_1}} &= \overrightarrow{r_A} + 3 \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|} = (1, 9, -7) + 3 \cdot \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= (1, 9, -7) + (2, 2, 1) = (3, 11, -6). \end{aligned}$$

Določimo zdaj enačbo ravnine $\Pi_1 : 2x + 2y + z = d_1$. Desno stran d_1 dobimo tako, da koordinate točke A_1 vstavimo v enačbo, torej $d_1 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot (-6) = 22$. Torej je $\Pi_1 : 2x + 2y + z = 22$.

Krajevni vektor točke A_2 dobimo tako, da od krajevnega vektorja točke A odštejemo vektor dolžine 3 v smeri vektorja $\overrightarrow{n}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_{A_2}} &= \overrightarrow{r_A} - 3 \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|} = (1, 9, -7) - 3 \cdot \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= (1, 9, -7) - (2, 2, 1) = (-1, 7, -8). \end{aligned}$$

Enačbo ravnine $\Pi_2 \colon 2x + 2y + z = 4$ določimo na enak način kot enačbo ravnine Π_1, le da namesto točke A_1 vstavimo točko A_2.

24. (3. izpit, 9.6.2014) Dani sta premici

$$p \colon x = 3 + t,\ y = -3,\ z = -1 - 2t \quad \text{in} \quad q \colon \frac{x + 2}{2} = 1 - y = 3 - z.$$

(a) Poiščite razdaljo med njima.

(b) Določite pravokotno projekcijo točke $A(4, 3, 7)$ na premico p.

Rešitev: Iz parametrične enačbe premice p razberemo, da je njen smerni vektor $\overrightarrow{s_p} = (1, 0, -2)$ in da na njej leži točka $P(3, -3, -1)$. Iz kanonske oblike enačbe premice q določimo smerni vektor $\overrightarrow{s_q} = (2, -1, -1)$ in točko $Q(-2, 1, 3)$, ki leži na njej. Lahko bi najprej preverili, da se premici p in q ne sekata, vendar tega naloga ne zahteva.

(a) Razdaljo med premicama bomo določili na dva načina.

1. način
Razdalja med premicama p in q je enaka dolžini višine paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{s_p}$ in $\overrightarrow{s_q}$, na ploskev, ki jo napenjata vektorja $\overrightarrow{s_p}$ in $\overrightarrow{s_q}$. Torej je

$$d(p,q) = \frac{|[\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{s_p}, \overrightarrow{s_q}]|}{|\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q}|} = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot (\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q})|}{|\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q}|}.$$

Izračunajmo najprej $\overrightarrow{QP} = (3, -3, -1) - (-2, 1, 3) = (5, -4, -4)$ in

$$\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -3, -1).$$

Torej

$$d(p,q) = \frac{|(5, -4, -4) \cdot (-2, -3, -1)|}{|(-2, -3, -1)|} = \frac{|-10 + 12 + 4|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

2. način
Razdalja med premicama p in q je enaka dolžini pravokotne projekcije vektorja $\overrightarrow{QP}$ na $\vec{n} = \overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q}$:

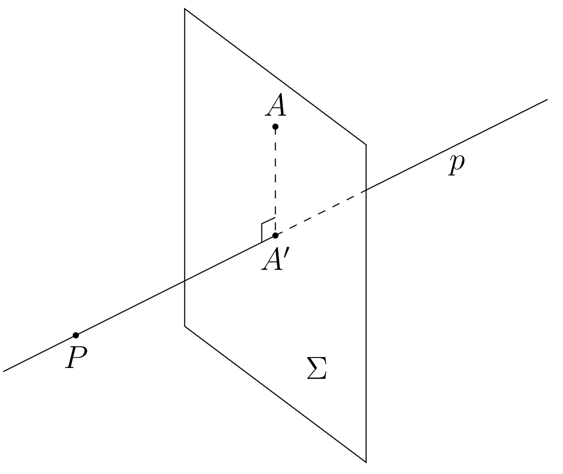
$$d(p,q) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Če vstavimo $\vec{n} = \overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q}$, dobimo isto formulo kot pri 1. načinu.

Opomba: Razdalja med premicama p in q je enaka razdalji med vzporednima ravninama z normalnim vektorjem $\vec{n}$, v katerih ležita premici p in q. Torej bi lahko razdaljo izračunali še na 3. način.

(b) Označimo pravokotno projekcijo točke A na premico p z A'. Nalogo bomo rešili na tri načine.

1. način
Naj bo Σ ravnina, ki je pravokotna na premico p in na kateri leži točka A. Potem je A' presek ravnine Σ in premice p. Ker je ravnina pravokotna na premico, lahko za njen normalni vektor vzamemo: $\vec{n} = \overrightarrow{s_p}$.



Določimo enačbo ravnine $\Sigma : x - 2z = d$. Desno stran d dobimo tako, da koordinate točke A vstavimo v enačbo, torej $d = 4 + (-2) \cdot 7 = -10$. Enačba ravnine je torej $\Sigma : x - 2z = -10$.

Presek ravnine Σ in premice p izračunamo tako, da poiščemo vrednost parametra t, pri kateri točka s koordinatami $(3 + t, -3, -1 - 2t)$ leži v ravnini:

$$\begin{aligned} (3 + t) - 2 \cdot (-1 - 2t) &= -10, \\ 5 + 5t &= -10, \\ t &= -3. \end{aligned}$$

Če $t = -3$ vstavimo v parametrično obliko enačbe premice, dobimo

$$x = 3 + (-3) = 0,\ y = -3 \quad \text{in} \quad z = -1 - 2(-3) = 5.$$

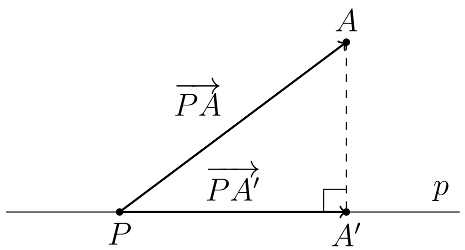
Torej je $A'(0, -3, 5)$.

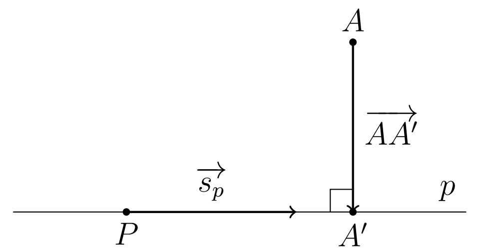
2. način
Koordinate točke A' lahko dobimo tako, da krajevnemu vektorju točke $P(3, -3, -1)$ prištejemo pravokotno projekcijo $\overrightarrow{PA'}$ vektorja

$$\overrightarrow{PA} = (4, 3, 7) - (3, -3, -1) = (1, 6, 8)$$

na premico p:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_{A'}} &= \overrightarrow{r_P} + \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{r_P} + \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{s_p}}{|\overrightarrow{s_p}|^2}\,\overrightarrow{s_p} = (3, -3, -1) + \frac{(1, 6, 8) \cdot (1, 0, -2)}{|(1, 0, -2)|^2}\,(1, 0, -2) \\ &= (3, -3, -1) - \frac{15}{5} \cdot (1, 0, -2) = (0, -3, 5). \end{aligned}$$





3. način
Ker točka A' leži na premici p, je njen krajevni vektor oblike

$$\overrightarrow{r_{A'}} = (3+t, -3, -1-2t)$$

pri nekem $t \in \mathbb{R}$. Iščemo tako vrednost t, da bo vektor $\overrightarrow{AA'}$ pravokoten na premico. Zapišimo

$$\overrightarrow{AA'} = (3+t, -3, -1-2t) - (4,3,7) = (-1+t, -6, -8-2t).$$

Zaradi pravokotnosti velja

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{s_p} &= 0, \\
(-1+t, -6, -8-2t) \cdot (1, 0, -2) &= 0, \\
-1 + t + 16 + 4t &= 0, \\
t &= -3.
\end{aligned}$$

Torej $\overrightarrow{r_{A'}} = (3 + (-3), -3, -1 + 2 \cdot 3) = (0, -3, 5)$.

25. (3. izpit, 9.6.2014) Dane imamo tri enačbe ravnin:

$$\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 0, \\
x & + & 2y & + & \alpha z & = & -1, \\
2x & + & \alpha y & + & 4z & = & 2.
\end{array}$$

(a) Za katere vrednosti parametra α se ravnine ne sekajo?

(b) Za katere vrednosti parametra α se sekajo v premici? Določite njeno enačbo.

(c) Poiščite presečišče ravnin za $\alpha = 2$.

Rešitev: Medsebojni položaj ravnin za različne vrednosti parametra α bomo najlažje določili, če rešimo sistem linearnih enačb s parametrom α, ki ga določajo enačbe ravnin. Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha & -1 \\ 2 & \alpha & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+(\alpha-1)(2-\alpha) & 2-(2-\alpha) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha-3) & \alpha \end{array}\right].$$

Enačba, ki pripada zadnji vrstici, je

$$-\alpha(\alpha-3)z = \alpha.$$

(a) Ravnine se ne bodo sekale, ko sistem ne bo imel rešitve. To velja, ko je $\alpha = 3$, saj dobimo protislovno enačbo. Torej se pri $\alpha = 3$ ravnine ne sekajo.

(b) Ravnine se bodo sekale v premici, ko bo sistem imel neskončno mnogo rešitev, odvisnih od enega parametra. Taka situacija nastane, ko so v zadnji vrstici zgornjetrikotne razširjene matrike same ničle. To velja za $\alpha = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $y - z = -1$. Če upoštevamo, da je $z = t$, dobimo $y = -1 - z = -1 + t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x + y + z = 0$ in zato $x = -y - z = 1 - t - t = 1 - 2t$. Parametrična enačba premice, v kateri se ravnine sekajo, je

$$p\colon x = -1 + 2t,\ y = -1 + t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

(c) Zapišimo zgornjetrikotno matriko za $\alpha = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Iz zadnje vrstice sledi, da je $2z = 2$, torej $z = 1$. Drugo vrstico lahko prepišemo v enačbo $y + z = -1$, torej $y = -1 - z = -1 - 1 = -2$. Iz prve vrstice sledi, da je

$x + y + z = 0$ in zato $x = -y - z = 2 - 1 = 1$. Torej se ravnine sekajo v točki $T(1, -2, 1)$.

26. (1. kolokvij, 1.12.2014) Premici, določeni z enačbama

$$p\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \text{ in } q\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5},$$

sta mimobežnici.

(a) Določite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T_0(-4, -5, 3)$ in premico p.

(b) Izračunajte koordinate točke T_1, v kateri premica q prebada ravnino iz (a).

(c) Poiščite presečišče T_2 premice p in premice skozi točki T_0 in T_1, če obstaja.

Rešitev: Iz enačbe premice p lahko razberemo, da je njen smerni vektor $\overrightarrow{s_p} = (3, -2, -1)$ in da na njej leži točka $P(-1, -3, 2)$. Na enak način iz enačbe premice q določimo $\overrightarrow{s_q} = (2, 3, -5)$ in točko $Q(2, -1, 1)$, ki leži na njej.

(a) Označimo s Π ravnino, ki vsebuje točko T_0 in premico p. Ker na premici p leži točka P, v ravnini Π leži tudi vektor $\overrightarrow{T_0P} = (-1, -3, 2) - (-4, -5, 3) = (3, 2, -1)$. Normalni vektor ravnine Π je pravokoten na $\overrightarrow{T_0P}$ in na $\overrightarrow{s_p}$, torej je vzporeden njunemu vektorskemu produktu:

$$\overrightarrow{T_0P} \times \overrightarrow{s_p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 0, -12) = -4 \cdot (1, 0, 3).$$

Določimo enačbo ravnine $\Pi : x + 3z = d$. Desno stran d dobimo tako, da koordinate točke P vstavimo v enačbo, torej $d = -1 + 3 \cdot 2 = 5$.

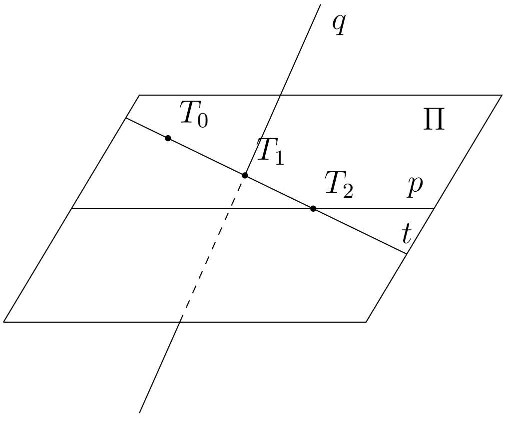
(b) Zapišimo enačbo premice q v parametrični obliki:

$$q\colon x = 2 + 2\lambda,\ y = -1 + 3\lambda,\ z = 1 - 5\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Presek ravnine Π in premice q izračunamo tako, da poiščemo tisto vrednost parametra λ, pri kateri točka s koordinatami $(2 + 2\lambda, -1 + 3\lambda, 1 - 5\lambda)$ leži v ravnini:

$$\begin{aligned} (2 + 2\lambda) + 3 \cdot (1 - 5\lambda) &= 5, \\ 5 - 13\lambda &= 5, \\ \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Če $\lambda = 0$ vstavimo v parametrično obliko enačbe premice q, dobimo ravno koordinate točke Q. Torej je $T_1 = Q$.



(c) Premica t skozi T_0 in T_1 ima smerni vektor vzporeden vektorju:

$$\overrightarrow{T_0T_1} = (2, -1, 1) - (-4, -5, 3) = (6, 4, -2) = 2(3, 2, -1).$$

Torej je njena parametrična oblika enaka

$$t\colon x = -4 + 3\alpha,\ y = -5 + 2\alpha,\ z = 3 - \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zapišimo v parametrični obliki še enačbo premice p:

$$p\colon x = -1 + 3\beta,\ y = -3 - 2\beta,\ z = 2 - \beta,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Ker premici t in p ležita v ravnini Π in nista vzporedni, se zagotovo sekata. Njuno presečišče je rešitev sistema enačb:

$$\begin{aligned} -4 + 3\alpha &= -1 + \beta, \\ -5 + 2\alpha &= -3 - 2\beta, \\ 3 - \alpha &= 2 - \beta. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb sledi, da je $\alpha = 1$ in $\beta = 0$. Ker izračunani vrednosti zadostita tudi tretji enačbi, je sistem res enolično rešljiv. Če $\beta = 0$ vstavimo v parametrično enačbo premice p, vidimo, da se premici sekata ravno v točki P. Torej je $T_2 = P$.

27. (3. izpit, 15.6.2015) Določite premico q, ki vsebuje točko $T_0(3,-2,-4)$, je vzporedna ravnini Σ, katere enačba je

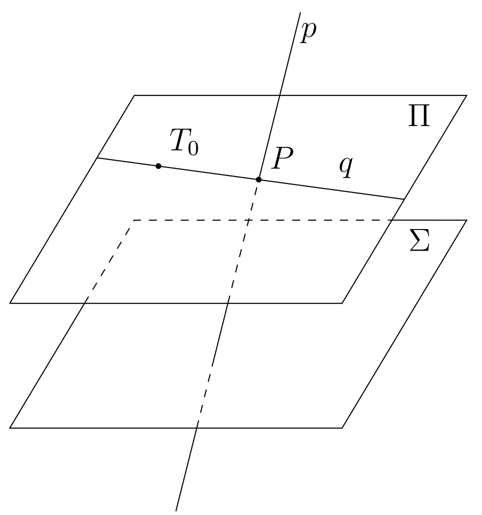
$$3x-2y-3z-7=0,$$

hkrati pa še seka premico p z enačbo

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}.$$

Narišite dobro skico situacije.

Rešitev:



Ker je premica q vzporedna ravnini Σ, leži v ravnini Π, ki je vzporedna ravnini Σ in vsebuje točko T_0. Zaradi vzporednosti ravnin je normalni vektor ravnine Π enak normalnemu vektorju $\overrightarrow{n}=(3,-2,-3)$ ravnine Σ. Določimo enačbo ravnine $\Pi: 3x-2y-3z=d$. Desno stran d dobimo tako, da koordinate točke T_0 vstavimo v enačbo, torej $d=3\cdot 3+(-2)\cdot(-2)-3\cdot(-4)=25$. Ker premica p seka premico q, mora imeti vsaj eno skupno točko z ravnino Π. Iz kanonske oblike enačbe premice p razberemo, da je njen smerni vektor $\overrightarrow{s_p}=(3,-2,2)$ in da na njej leži točka $A(2,-4,1)$. Torej je parametrična oblika enačbe premice p enaka

$$p\colon x=2+3\lambda,\ y=-4-2\lambda,\ z=1+2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Presek ravnine Π in premice p izračunamo tako, da poiščemo tisto vrednost parametra λ, pri kateri točka s koordinatami $(2+3\lambda, -4-2\lambda, 1+2\lambda)$ leži v ravnini:

$$\begin{aligned} 3\cdot(2+3\lambda) - 2\cdot(-4-2\lambda) - 3\cdot(1+2\lambda) &= 25, \\ 11+7\lambda &= 25, \\ \lambda &= 2. \end{aligned}$$

Ker dobimo samo eno rešitev, premica p ne leži v ravnini Π, ampak jo seka v eni točki. Če $\lambda = 2$ vstavimo v parametrično obliko enačbe premice p, dobimo

$$x = 2+3\cdot 2 = 8,\ y = -4-2\cdot 2 = -8,\ z = 1+2\cdot 2 = 5.$$

Torej je presečišče točka $P(8,-8,5)$. Smerni vektor premice q je enak

$$\overrightarrow{T_0P} = (8,-8,5) - (3,-2,-4) = (5,-6,9).$$

Zato je vektorska oblika enačbe premice q enaka

$$q\colon \overrightarrow{r} = (3,-2,-4) + \mu(5,-6,9),\ \mu \in \mathbb{R}.$$

28. (1. kolokvij, 23.11.2015) Dani sta premici $p\colon \overrightarrow{r} = \lambda(-2,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, in $q\colon \overrightarrow{r} = (1,1,-1) + \mu(0,2,-1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

    (a) Pokažite, da se premici p in q sekata.

    (b) Poiščite enačbo ravnine Π, ki vsebuje premici p in q.

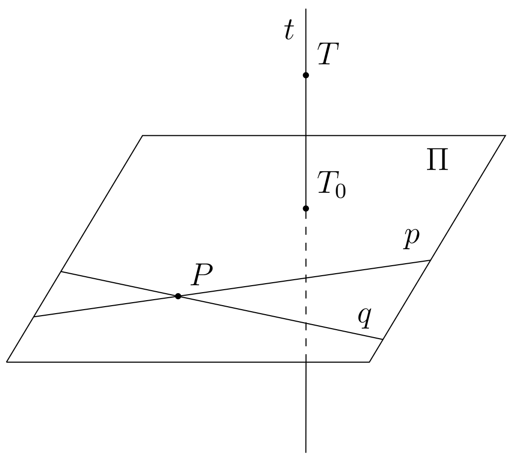
    (c) Poiščite točko T_0 na ravnini Π, ki je najbližja točki $T(5,-3,5)$ in določite razdaljo točke T od ravnine Π.

Rešitev:

(a) Enačbi obeh premic zapišemo v parametrični obliki:

$$p\colon x = -2\lambda,\ y = 0,\ z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$q\colon x = 1,\ y = 1+2\mu,\ z = -1-\mu,\ \mu \in \mathbb{R}.$$



Če se premici p in q sekata, mora biti rešljiv sistem enačb

$$\begin{aligned} -2\lambda &= 1, \\ 0 &= 1 + 2\mu, \\ \lambda &= -1 - \mu. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb sledi, da je $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$. Ker izračunani vrednosti zadostita tudi tretji enačbi, je sistem enolično rešljiv. Če $\lambda = -\frac{1}{2}$ vstavimo v parametrično enačbo premice p, dobimo

$$x = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1,\ y = 0,\ z = -\frac{1}{2},$$

kar so koordinate presečišča premic, točke $P(1, 0, -\frac{1}{2})$.

(b) Najprej določimo normalni vektor ravnine Π, v kateri ležita premici p in q. Normalni vektor ravnine je pravokoten na $\overrightarrow{s_p}$ in na $\overrightarrow{s_q}$, torej je vzporeden njunemu vektorskemu produktu:

$$\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -2, -4) = -2 \cdot (1, 1, 2).$$

Označimo $\overrightarrow{n} = (1, 1, 2)$. Enačba iskane ravnine je oblike $\Pi : x + y + 2z = d$. Če upoštevamo še, da presečišče premic, točka P, leži na ravnini Π, dobimo $d = 0$. Enačba ravnine je $x + y + 2z = 0$.

(c) Točka T_0 na ravnini Π, ki je najbližja točki T, je njena pravokotna projekcija na ravnino. Dobimo jo tako, da poiščemo presečišče premice t, ki gre skozi točko

T in je pravokotna na Π, z ravnino Π. Torej $\overrightarrow{s_t} = \overrightarrow{n} = (1,1,2)$. Vektorska enačba premice t je potem

$$t\colon\ \overrightarrow{r} = (5,-3,5) + \alpha(1,1,2),\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zapišimo enačbo premice t v parametrični obliki:

$$t\colon x = 5+\alpha,\ y = -3+\alpha,\ z = 5+2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Presek ravnine Π in premice t izračunamo tako, da poiščemo tisto vrednost parametra α, pri kateri točka s koordinatami $(5+\alpha, -3+\alpha, 5+2\alpha)$ leži v ravnini:

$$\begin{aligned}(5+\alpha)+(-3+\alpha)+2\cdot(5+2\alpha) &= 0,\\ 12+6\alpha &= 0,\\ \alpha &= -2.\end{aligned}$$

Če $\alpha = -2$ vstavimo v parametrično obliko enačbe premice t, dobimo

$$x = 5+(-2) = 3,\ y = -3+(-2) = -5,\ z = 5+2\cdot(-2) = 1.$$

Torej je $T_0(3,-5,1)$.

Razdalja točke T do ravnine Π je enaka dolžini vektorja $\overrightarrow{TT_0}$:

$$d(T,\Pi) = |\overrightarrow{TT_0}| = |(3,-5,1)-(5,-3,5)| = |(-2,-2,-4)| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}.$$

29. (2. izpit, 11.2.2016) Podani sta ravnini

$$\Sigma_1\colon x+y+z = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma_2\colon \text{2x}+\text{3y}+\text{4z} = 1.$$

(a) Pokažite, da se ravnini Σ_1 in Σ_2 sekata v premici in poiščite njeno enačbo.

(b) Poiščite vse vrednosti parametra α, za katere ravnine Σ_1, Σ_2 in

$$\Sigma_3\colon x+y+\alpha^2 z = \alpha$$

nimajo nobene skupne točke.

Rešitev: (a) Enačbo premice bomo poiskali na dva načina.

1. način

Če enačbo ravnine Σ_1 pomnožimo z (-2) in jo prištejemo k enačbi ravnine Σ_2, dobimo $-2(x+y+z)+2x+3y+4z = y+4z = 1$. Če označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, dobimo $y = 1-2z = 1-2t$. Iz enačbe ravnine Σ_1 sledi, da je $x = -y-z = -1+2t-t = 1+t$. Parametrična enačba premice, v kateri se ravnini sekata, je torej

$$p\colon x = -1+t,\ y = 1-2t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Enačbo premice bi lahko dobili tudi z Gaussovo eliminacijsko metodo.

2. način

Ker ravnini nista vzporedni, se sekata v premici p, katere smerni vektor je vzporeden vektorskemu produktu normalnih vektorjev ravnin $\overrightarrow{n_1} = (1,1,1)$ in $\overrightarrow{n_2} = (2,3,4)$:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (1,-2,1).$$

Potrebujemo še eno točko P, ki leži v preseku ravnin. Če izberemo npr. tako točko, da bo imela zadnjo koordinato enako 0, dobimo prvi dve koordinati, če rešimo sistem enačb $x+y=0$ in $2x+3y=1$. Torej je $P(-1,1,0)$ in

$$p\colon x = -1+t,\ y = 1-2t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Medsebojni položaj ravnin za različne vrednosti parametra α bomo najlažje določili, če rešimo sistem linearnih enačb, ki ga določajo enačbe ravnin. Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)(\alpha+1) & \alpha \end{array}\right].$$

Enačba, ki pripada zadnji vrstici, je

$$(\alpha-1)(\alpha+1)z = \alpha.$$

Ravnine se ne bodo sekale, ko sistem ne bo imel rešitve. To velja, ko je $\alpha_1 = 1$ ali $\alpha_2 = -1$, saj dobimo protislovno enačbo. Torej pri $\alpha_{1,2} = \pm 1$ ravnine nimajo nobene skupne točke.

30. (1. izpit, 23.1.2017) Dani sta premica $p\colon \vec{r} = (2,3,-4) + \lambda(-1,-2,1)$ in točka $T(1, \frac{5}{2}, 0)$.

    (a) Napišite enačbo ravnine, ki gre skozi premico p in točko T.

    (b) Poiščite točko T_0 na premici p, ki je najbližja točki T in določite razdaljo točke T od premice p.

Rešitev: Iz enačbe premice p lahko razberemo, da je njen smerni vektor $\vec{s} = (-1,-2,1)$ in da na njej leži točka $P(2,3,-4)$.

(a) Označimo s Π ravnino, ki vsebuje točko T in premico p. Ker točka P leži na premici p, v ravnini Π leži tudi vektor $\overrightarrow{PT} = (1, \frac{5}{2}, 0) - (2,3,-4) = (-1, -\frac{1}{2}, 4)$. Normalni vektor ravnine Π je pravokoten na $\overrightarrow{PT}$ in na $\vec{s}$, torej je vzporeden njunemu vektorskemu produktu:

$$\overrightarrow{PT} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{15}{2}, -3, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot (5,-2,1).$$

Določimo enačbo ravnine $\Pi : 5x - 2y + z = d$. Če v enačbo vstavimo koordinate točke P, dobimo $d = 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-4) = 0$. Enačba ravnine je $5x - 2y + z = 0$.

(b) Označimo pravokotno projekcijo točke T na premico p z T_0. Točko T_0 bomo poiskali na tri načine.

1. način
Naj bo Σ ravnina, ki je pravokotna na premico p na kateri leži točka T. Potem je T_0 presek ravnine Σ in premice p.

Vzemimo $\vec{n} = \vec{s}$ in določimo enačbo ravnine $\Sigma : x + 2y - z = d$. Desno stran d dobimo tako, da v enačbo vstavimo koordinate točke T, torej $d = 1 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 6$. Enačba ravnine Σ je enaka $x + 2y - z = 6$.

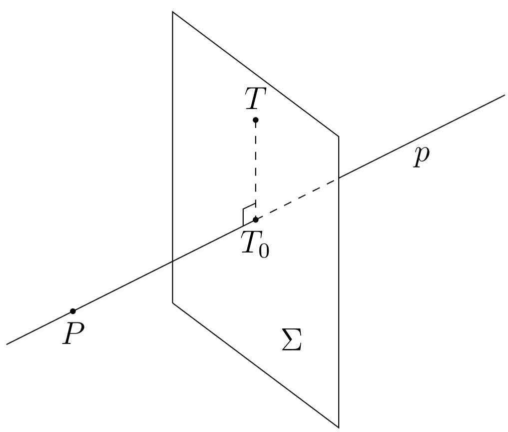
Presek ravnine Σ in premice p izračunamo tako, da poiščemo tisto vrednost parametra t, pri kateri točka s koordinatami $(2-t, 3-2t, -4+t)$ leži v ravnini:

$$\begin{aligned} (2-t) + 2 \cdot (3-2t) - (-4+t) &= 6, \\ 12 - 6t &= 6, \\ t &= 1. \end{aligned}$$

Če $t = 1$ vstavimo v parametrično obliko enačbe premice, dobimo

$$x = 2 - 1 = 1,\ y = 3 - 2 = 1 \quad \text{in} \quad z = -4 + 1 = -3.$$

Torej je $T_0(1, 1, -3)$.

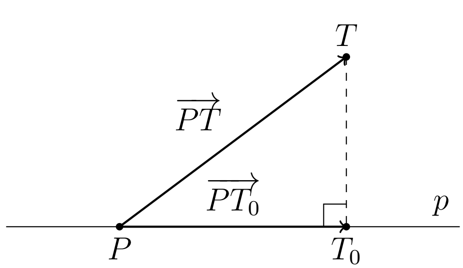


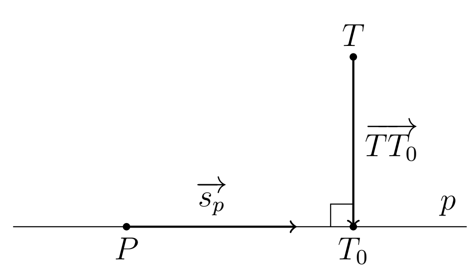
2. način
Koordinate točke T_0 lahko dobimo tako, da krajevnemu vektorju točke $P(2, 3, -4)$ prištejemo pravokotno projekcijo vektorja

$$\overrightarrow{PT} = (1, \frac{5}{2}, 0) - (2, 3, -4) = (-1, -\frac{1}{2}, 4)$$

na premico p:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_{T_0}} &= \overrightarrow{r_P} + \frac{\overrightarrow{PT} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|^2}\,\vec{s} = (2, 3, -4) + \frac{(-1, -\frac{1}{2}, 4) \cdot (-1, -2, 1)}{|(-1, -2, 1)|^2}\,(-1, -2, 1) \\ &= (2, 3, -4) + (-1, -2, 1) = (1, 1, -3). \end{aligned}$$





3. način
Ker točka T_0 leži na premici p, obstaja tak t, da velja

$$\overrightarrow{r_{T_0}} = (2-t, 3-2t, -4+t).$$

Iščemo tak t, da bo vektor $\overrightarrow{TT_0}$ pravokoten na premico. Zapišimo

$$\overrightarrow{TT_0} = (2-t, 3-2t, -4+t) - \left(1, \frac{5}{2}, 0\right) = \left(1-t, \frac{1}{2}-2t, -4+t\right).$$

Zaradi pravokotnosti velja

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TT_0} \cdot \overrightarrow{s} &= 0, \\ \left(1-t, \frac{1}{2}-2t, -4+t\right) \cdot (-1,-2,1) &= 0, \\ -1+t-1+4t-4+t &= 0, \\ t &= 1. \end{aligned}$$

Torej $\overrightarrow{r_{T_0}} = (2-1, 3-2, -4+1) = (1,1,-3)$.

Razdalja točke T do premice p je enaka dolžini vektorja $\overrightarrow{TT_0}$:

$$d(T,p) = |\overrightarrow{TT_0}| = \left|(1,1,-3) - \left(1, \frac{5}{2}, 0\right)\right| = \left|\left(0, -\frac{3}{2}, -3\right)\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+9} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

31. (3. izpit, 13.6.2017) V prostoru imamo ravnino $\Pi: x+y-2z=0$ ter premici $p: \overrightarrow{r} = (1,1,1) + \lambda(0,2,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, in $q: x = y = -\frac{z}{2}$.

  (a) Preverite, da premica p leži v ravnini Π.

  (b) Preverite, da je premica q pravokotna na ravnino Π.

  (c) Izračunajte razdaljo med premicama p in q.

Rešitev: Iz enačbe ravnine razberemo, da je njen normalni vektor $\overrightarrow{n} = (1,1,-2)$ in da gre skozi izhodišče $O(0,0,0)$. Iz enačbe premice p lahko razberemo, da je njen smerni vektor $\overrightarrow{s_p} = (0,2,1)$ in da na njej leži točka $P(1,1,1)$. Iz kanonske enačbe premice q razberemo njen smerni vektor $\overrightarrow{s_q} = (1,1,-2)$ in da gre skozi izhodišče $O(0,0,0)$.

(a) Enačbo premice p zapišemo v parametrični obliki:

$$p\colon x = 1,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = 1 + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

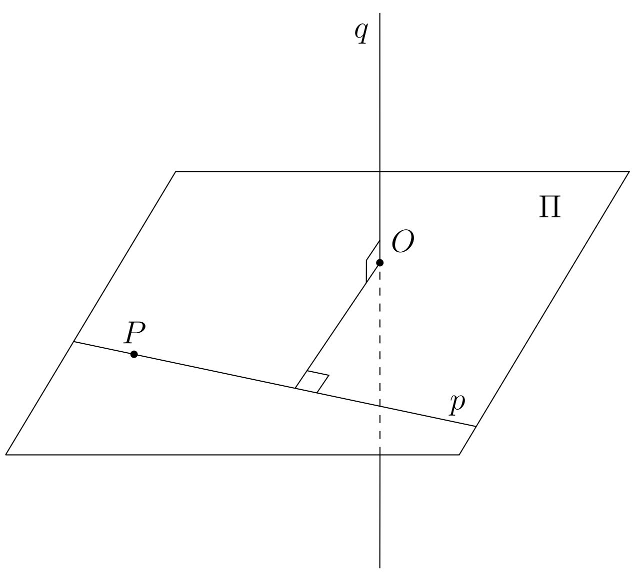
Ker velja

$$x + y - 2z = 1 + 1 + 2\lambda - 2(1 + \lambda) = 0,$$

premica p leži v ravnini Π.

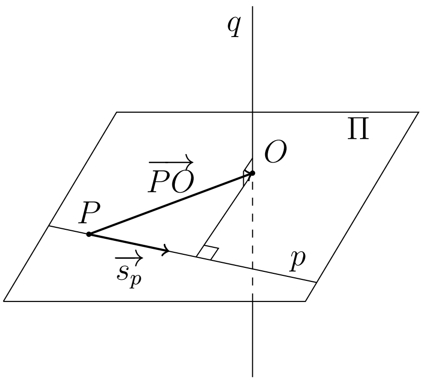
(b) Ker je $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_q}$, je premica q pravokotna na ravnino Π. (Če bi veljalo $\overrightarrow{n} = \alpha\overrightarrow{s_q}$ za nek $\alpha \in \mathbb{R}$, bi sklepali enako.)

(c) Ker je premica q pravokotna na ravnino Π in ker premica p leži v ravnini Π, je razdalja med premicama p in q kar razdalja med presečiščem premice q z ravnino Π. Ker pa izhodišče $O(0,0,0)$ leži na q in na Π, je izhodišče tudi njuno presečišče. Torej je razdalja $d(p,q) = d(p,O)$, ki jo bomo poiskali na dva načina.



1. način
Razdalja točke O do premice p je enaka višini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{s_p}$ in $\overrightarrow{PO}$. Ker je ploščina paralelograma enaka dolžini vektorskega produkta

$$\vec{s_p} \times \overrightarrow{PO} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-1,2),$$



je

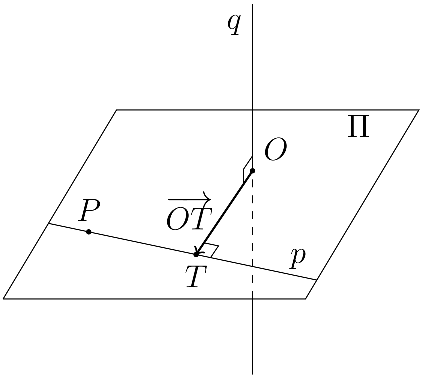
$$d(p,O) = \frac{\left|\vec{s_p} \times \overrightarrow{PO}\right|}{|\vec{s_p}|} = \frac{|(-1,-1,2)|}{|(0,2,1)|}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

2. način

Razdalja točke O do premice p je enaka razdalji med točko O in točko T, ki je pravokotna projekcija O na premico p. Ker točka T leži na premici p, velja $\vec{r_T} = (1, 1+2\lambda, 1+\lambda)$ za nek $\lambda \in \mathbb{R}$. Iščemo tako vrednost parametra λ, da bo vektor $\overrightarrow{OT}$ pravokoten na premico p. Zaradi pravokotnosti velja

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} \cdot \vec{s_p} &= 0, \\ (1, 1+2\lambda, 1+\lambda) \cdot (0,2,1) &= 0, \\ 2 + 4\lambda + 1 + \lambda &= 0, \\ \lambda &= -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$



Torej je

$$\vec{r_T} = \left(1, 1 + 2\left(-\frac{3}{5}\right), 1 - \frac{3}{5}\right) = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

in

$$d(O,p) = \left|\overrightarrow{OT}\right| = \left|\left(1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

6 Vektorji in analitična geometrija

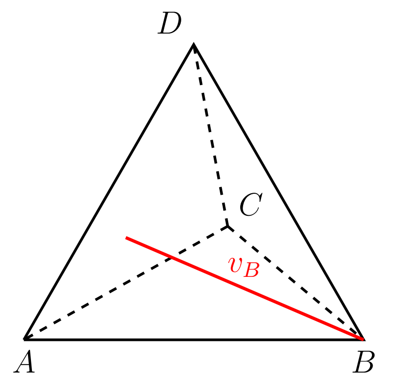
32. (1. kolokvij, 25.11.2013) Naj bodo točke $A(1,2,0)$, $B(3,1,-4)$, $C(2,0,1)$ in $D(0,2,1)$ oglišča tetraedra $ABCD$.

    (a) Izračunajte prostornino tristrane piramide in dolžino višine na ploskev skozi točke A, C in D.

    (b) Določite enačbo premice p skozi točki A in C.

    (c) Poiščite presečišče premice p in premice $q\colon x = 1 - y = \frac{z+4}{2}$.

Rešitev:



(a) Prostornina tristrane piramide je enaka eni šestini absolutne vrednosti mešanega produkta vektorjev $\overrightarrow{AB} = (2,-1,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-2,1)$ in $\overrightarrow{AD} = (-1,0,1)$. Mešani produkt je enak

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 + 8 - 4 + 1 = 6.$$

(Pri izračunu determinante 3×3 matrike smo uporabili razvoj po tretji vrstici.) Iskana prostornina je torej enaka 1.
Prostornino tristrane piramide lahko izračunamo tudi s pomočjo formule

$$V = \frac{P_{ACD} \cdot v_B}{3},$$

kjer je P_{ACD} ploščina trikotnika ACD, v_B pa iskana dolžina višine na ploskev ACD. Ploščina P_{ACD} je enaka polovici dolžine vektorskega produkta vektorjev $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AD}$. Vektorski produkt je enak

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -2, -2).$$

Dolžina dobljenega vektorja je tako

$$|(-2,-2,-2)| = 2|(1,1,1)| = 2\sqrt{1+1+1} = 2\sqrt{3}.$$

Ploščina ploskve ACD je torej enaka $\sqrt{3}$. Zdaj pa lahko izračunamo še v_B:

$$v_B = \frac{3V}{P_{ACD}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

(b) Smerni vektor iskane premice je vzporeden vektorju $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 1)$. Označimo $\overrightarrow{s_p} = (1, -2, 1)$. Zapišimo parametrično enačbo premice p, ki je določena z vektorjem $\overrightarrow{s_p}$ in točko A:

$$p:\ x = 1 + \lambda,\ y = 2 - 2\lambda,\ z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Zapišimo enačbo premice q v parametrični obliki

$$q:\ x = \mu,\ y = 1 - \mu,\ z = -4 + 2\mu,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Če se premici p in q sekata, mora biti rešljiv sistem enačb

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= \mu, \\ 2 - 2\lambda &= 1 - \mu, \\ \lambda &= -4 + 2\mu. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb dobimo $\lambda = 2$ in $\mu = 3$, kar ustreza tudi tretji enačbi. Vstavimo npr. $\lambda = 2$ v enačbo premice p in dobimo

$$x = 1 + 2 = 3,\ y = 2 - 2 \cdot 2 = -2 \text{ ter } z = 2,$$

kar so koordinate presečišča premic, točke $T(3, -2, 2)$.

33. (2. izpit, 7.2.2014) Naj bodo $A(2,-1,0)$, $B(6,-1,4)$ in $C(5,-3,1)$ oglišča trikotnika.

(a) Določite ploščino trikotnika ABC.

(b) Poiščite enačbo ravnine Σ, v kateri leži trikotnik ABC.

(c) Napišite enačbo premice p skozi točki A in B.

(d) Poiščite pravokotno projekcijo točke C na premico p.

Rešitev: (a) Ploščina trikotnika ABC je enaka polovici dolžine vektorskega produkta vektorjev $\overrightarrow{AB} = (4,0,4)$ in $\overrightarrow{AC} = (3,-2,1)$. Izračunajmo najprej njun vektorski produkt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (4,0,4) \times (3,-2,1) = 4 \cdot (1,0,1) \times (3,-2,1) \\
&= 4 \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 4 \cdot (2,2,-2) = 8 \cdot (1,1,-1).
\end{aligned}$$

Ploščina trikotnika je tako enaka

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|8 \cdot (1,1,-1)| = 4\sqrt{1+1+1} = 4\sqrt{3}.$$

(b) Normalni vektor $\overrightarrow{n}$ ravnine Σ je pravokoten na vse vektorje v ravnini, torej tudi na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$. To pa pomeni, da je vzporeden njunemu vektorskemu produktu $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 8(1,1,-1)$. Leva stran enačbe ravnine Σ je tako že znana (npr. $x + y - z = d$), parameter d pa določimo tako, da upoštevamo dejstvo, da na ravnini leži točka $A(2,-1,0)$: $d = 2 - 1 = 1$. Enačba ravnine Σ je $x + y - z = 1$.

(c) Smerni vektor $\overrightarrow{s}$ iskane premice je vzporeden vektorju $\overrightarrow{AB} = 4(1,0,1)$. Označimo $\overrightarrow{s} = (1,0,1)$. Ker premica p poteka skozi točko A, je njena enačba

$$p: \; x = 2 + \lambda, \; y = -1, \; z = \lambda, \; \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) Ravnina Π poteka skozi točko C in je pravokotna na premico p, kar pomeni, da je njen normalni vektor $\overrightarrow{n_\Pi}$ vzporeden smernemu vektorju $\overrightarrow{s}$ premice p. Označimo $\overrightarrow{n_\Pi} = (1,0,1)$ in določimo levo stran enačbe ravnine Π, npr. $x + z = d$. Parameter d izračunamo s pomočjo dejstva, da ravnina Π vsebuje točko $C(5,-3,1)$. Torej $d = 5 + 1 = 6$ in enačba ravnine Π je enaka $x + z = 6$.

Presečišče premice p in ravnine Π je pravokotna projekcija točke C na premico p. Označimo jo z C'. Njene koordinate izračunamo tako, da rešimo sistem enačb, ki določajo premico p in ravnino Π:

$$\begin{aligned}(2+\lambda)+\lambda &= 6,\\ \lambda &= 2.\end{aligned}$$

Če vstavimo dobljeno vrednost λ v enačbo premice p, dobimo:

$$x = 2+2,\ y = -1 \text{ in } z = 2,$$

kar so koordinate presečišča premice in ravnine, točke $C'(4,-1,2)$.
Opomba: Koordinate točke C' lahko izračunamo tudi z uporabo pravokotne projekcije vektorja $\overrightarrow{AC}$ na vektor $\overrightarrow{AB}$.

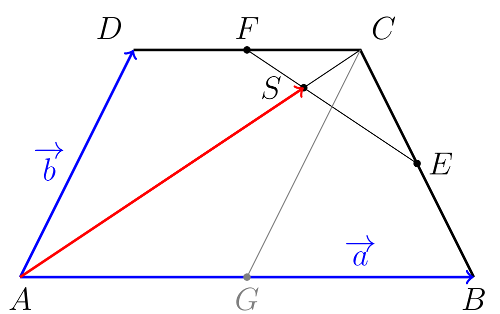
34. (2. izpit, 12.2.2015) Naj bodo $A(1,1,2)$, $B(1,5,2)$, $C(2,4,5)$ in D oglišča trapeza $ABCD$ za katerega velja $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Naj bo točka E razpolovišče daljice BC, točka F razpolovišče daljice DC in S presečišče daljic AC in EF. Označimo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$.

   (a) Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

   (b) Določite ploščino trikotnika ABS.

   (c) Določite enačbo ravnine, v kateri leži trapez.

Rešitev:



(a) Najprej na dva načina izrazimo vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev

$\vec{a}$ in $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS} &= \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{\lambda}{2}\vec{a} + \lambda\,\vec{b}, \\
\overrightarrow{AS} &= \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} + \mu\overrightarrow{FE} = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} + \mu\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \\
&= \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} + \mu\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\vec{b}.
\end{aligned}$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, se vektor $\overrightarrow{AS}$ enolično izraža kot njuna linearna kombinacija. Zato je

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} \quad \text{in} \quad \lambda = 1 - \frac{\mu}{2}.$$

Če nastavek za λ iz druge enačbe vstavimo v prvo enačbo, dobimo

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu,$$

od koder sledi $\mu = \frac{1}{3}$ in $\lambda = \frac{5}{6}$. Torej je

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\frac{5}{6}}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$$

(b) Ploščino trikotnika izrazimo s pomočjo dolžine vektorskega produkta vektorjev $\overrightarrow{AB} = (1,5,2)-(1,1,2) = (0,4,0)$ in $\overrightarrow{AS}$. Komponente drugega vektorja izračunamo s pomočjo rezultata iz točke (a) z upoštevanjem $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (0,4,0)$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Ker koordinate točke D v besedilu naloge niso podane, izrazimo vektor $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GC}$, kjer je točka G razpolovišče daljice AB. Njene koordinate izračunamo

$$\vec{r_G} = \frac{1}{2}\big(\vec{r_A} + \vec{r_B}\big) = \frac{1}{2}\big((1,1,2) + (1,5,2)\big) = \frac{1}{2}(2,6,4) = (1,3,2)\,.$$

Torej $\vec{b} = \overrightarrow{GC} = (2,4,5) - (1,3,2) = (1,1,3)$. Ta rezultat pa nas pripelje do komponent vektorja $\overrightarrow{AS}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS} &= \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} = \frac{5}{12}\cdot(0,4,0) + \frac{5}{6}\cdot(1,1,3) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}(0,4,0) + (1,1,3)\right) \\
&= \frac{5}{6}\big((0,2,0) + (1,1,3)\big) = \frac{5}{6}\cdot(1,3,3).
\end{aligned}$$

Vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AS}$ je enak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} &= (0,4,0) \times \left(\frac{5}{6} \cdot (1,3,3)\right) = 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot (0,1,0) \times (1,3,3) \\ &= \frac{10}{3} \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{10}{3}(3,0,-1).\end{aligned}$$

Ploščina trikotnika ABS je enaka

$$P_{ABS} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}|(3,0,-1)| = \frac{5}{3}\sqrt{9+1} = \frac{5}{3}\sqrt{10}.$$

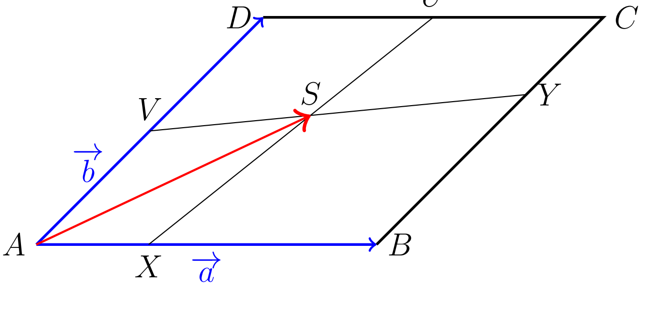
(c) Normalni vektor $\overrightarrow{n}$ iskane ravnine je pravokoten na vse vektorje v ravnini, torej tudi na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AS}$. To pomeni, da je vzporeden vektorskemu produktu $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \frac{10}{3}(3,0,-1)$. Leva stran enačbe ravnine je tako že znana (npr. $3x - z = d$), parameter d pa določimo tako, da upoštevamo dejstvo, da na ravnini leži točka $A(1,1,2)$: $d = 3 - 2 = 1$. Enačba iskane ravnine je $3x - z = 1$.

35. (2. izpit, 6.2.2017) V paralelogramu $ABCD$ označimo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Točke X, Y, U in V naj zaporedoma ležijo na stranicah AB, BC, CD in DA tako, da velja $|\overrightarrow{AX}| : |\overrightarrow{XB}| = 1 : 2$, $|\overrightarrow{BY}| : |\overrightarrow{YC}| = 2 : 1$, točka U razpolavlja daljico CD in točka V razpolavlja daljico AD. Označimo z S presečišče daljic XU in YV.

   (a) Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

   (b) Naj imajo točke A, B in D koordinate $A(2,0,0)$, $B(3,-2,2)$ in $D(4,1,2)$. Pokažite, da je paralelogram romb. Poiščite tudi enačbo ravnine, v kateri leži ta paralelogram.

Rešitev:



(a) Najprej na dva načina izrazimo vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AX} + \lambda\overrightarrow{XU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \lambda\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\right) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \lambda\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6}\right)\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}, \\
\overrightarrow{AS} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{VY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \mu\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \mu\left(\overrightarrow{a} + \frac{1}{6}\overrightarrow{b}\right) = \mu\overrightarrow{a} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}\right)\overrightarrow{b}.
\end{aligned}$$

Ker sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna, se vektor $\overrightarrow{AS}$ enolično izraža kot njuna linearna kombinacija. Ko izenačimo koeficiente pri vektorjih $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ dobimo:

$$\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6} = \mu \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}.$$

Če nastavek za λ iz prve enačbe vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6}\right),$$

od koder sledi $\lambda = \frac{4}{7}$. Torej je

$$\overrightarrow{AS} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{7}\right)\overrightarrow{a} + \frac{4}{7}\overrightarrow{b} = \frac{3}{7}\overrightarrow{a} + \frac{4}{7}\overrightarrow{b}.$$

(b) Dan paralelogram bo romb, ko bo imel stranice istih dolžin. V paralelogramu sta nasprotni stranici vedno istih dolžin, preveriti moramo torej le še, da sta istih dolžin npr. stranici AB in AD. Izrazimo komponente vektorjev, ki ležita na stranicah, o katerih je govora, in sicer

$$\overrightarrow{AB}(3,-2,2) - (2,0,0) = (1,-2,2) \quad \text{in} \quad \overrightarrow{AD} = (4,1,2) - (2,0,0) = (2,1,2).$$

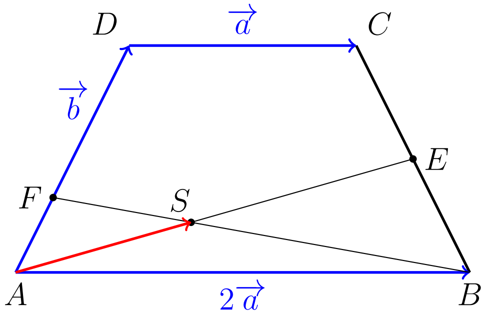
Njuni dolžini sta $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ in $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4+1+4} = 3$. Ker sta enaki, je dani paralelogram romb.
Normalni vektor $\overrightarrow{n}$ iskane ravnine je pravokoten na vse vektorje v ravnini, torej tudi na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$. To pa pomeni, da je vzporeden vektorskemu produktu $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$, ki je enak

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4-2, 4-2, 1+4) = (-6,2,5).$$

Leva stran enačbe ravnine je tako že znana (npr. $-6x+2y+5z=d$), parameter d pa določimo tako, da upoštevamo dejstvo, da na ravnini leži točka $A(2,0,0)$: $d=-12$. Enačba iskane ravnine je $-6x+2y+5z=-12$.

36. (4. izpit, 28.8.2017) Naj bo $ABCD$ trapez, kjer je $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{a}$. Naj bo točka E razpolovišče stranice BC in naj točka F deli stranico AD v razmerju $1:2$. Označimo z S presečišče daljic AE in FB. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.
Zapišite enačbo ravnine, v kateri leži trapez, če so koordinate točk $A(0,0,0)$, $B(2,1,1)$ in $D(-1,2,0)$.

Rešitev:



Najprej na dva načina izrazimo vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS} &= \lambda\overrightarrow{AE}=\lambda\left(2\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\lambda\left(2\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\right)\\
&= \lambda\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right)=\frac{3\lambda}{2}\overrightarrow{a}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{b},\\
\overrightarrow{AS} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\mu\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\mu\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{a}\right)=2\mu\overrightarrow{a}+\frac{1-\mu}{3}\overrightarrow{b}.
\end{aligned}$$

Ker sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna, se vektor $\overrightarrow{AS}$ enolično izraža kot njuna linearna kombinacija. Ko izenačimo koeficiente pri vektorjih $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ dobimo:

$$\frac{3\lambda}{2}=2\mu \qquad \text{in} \qquad \frac{\lambda}{2}=\frac{1-\mu}{3}.$$

Če prvo enačbo preoblikujemo v $\mu = \frac{3}{4}\lambda$ in ta nastavek za μ vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}\lambda,$$

od koder sledi $\lambda = \frac{4}{9}$. Torej je

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}\overrightarrow{b} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{9}\overrightarrow{b}.$$

Normalni vektor $\overrightarrow{n}$ iskane ravnine je pravokoten na vse vektorje v ravnini, torej tudi na vektorja $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$ in $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 0)$. To pa pomeni, da je vzporeden vektorskemu produktu $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$, ki je enak

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -1, 4 + 1) = -(2, 1, -5).$$

Leva stran enačbe ravnine je tako že znana (npr. $2x + y - 5z = d$), parameter d pa določimo tako, da upoštevamo dejstvo, da na ravnini leži točka $A(0, 0, 0)$: $d = 0$. Enačba iskane ravnine je $2x + y - 5z = 0$.

7 Matrike in sistemi linearnih enačb

37. (2. kolokvij, 13.1.2014) Obravnavajte sistem enačb glede na parameter a in zapišite vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2, \\ x & + & 5y & + & 7z & = & 6, \\ 3x & + & 5y & + & (a^2-3)z & = & a+6. \end{array}$$

Rešitev: Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & a^2-3 & a+6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & a^2 & a \end{array}\right] \ \Big| \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a^2 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right].$$

Zadnji vrstici pripada enačba

$$(a-2)(a+2)z = a-2. \tag{16}$$

(a) Če je $a=-2$, je enačba (16) protislovna, torej sistem nima rešitve.

(b) Sistem ima neskončno rešitev, ko so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle. To velja za $a=2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{17}$$

Označimo $z=t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $y+2z=1$. Če upoštevamo, da je $z=t$, dobimo $y=1-2z=1-2t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x+y-z=2$ in zato $x=2-y+z=2-1+2t+t=1+3t$. Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3t \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(c) Poglejmo si še primer, ko $a \neq 2$ in $a \neq -2$. V tem primeru lahko enačbo (16) delimo z $(a-2)(a+2)$ in dobimo

$$z = \frac{1}{a+2}.$$

Drugo vrstico matrike (17) lahko prepišemo v enačbo $y + 2z = 1$. Iz nje izrazimo

$$y = 1 - 2z = 1 - \frac{2}{a+2} = \frac{a}{a+2}.$$

Iz prve vrstice matrike (17) sledi, da je $x + y - z = 2$ in zato

$$x = 2 - y + z = 2 - \frac{a}{a+2} + \frac{1}{a+2} = \frac{a+5}{a+2}.$$

Torej ima sistem natanko eno rešitev

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+5}{a+2} \\ \frac{a}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}.$$

38. (1. izpit, 23.1.2014) Določite vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -14 & -4 \\ 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ali se matriko A da diagonalizirati? Odgovor utemeljite.

Rešitev: Najprej izračunamo lastne vrednosti, ki so ničle enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$. Pri računanju determinante uporabimo razvoj po zadnji vrstici, saj ima determinanta v zadnji vrstici dve ničli:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -14 & -4 \\ 3 & -5-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(2-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & -14 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)((8-\lambda)(-5-\lambda) + 42) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Torej ima matrika A lastne vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = 2$. Za vsako od lastnih vrednosti določimo sedaj še prirejene lastne vektorje v, ki so rešitve sistema $Av = \lambda v$.

Zapišimo razširjeno matriko sistema za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8-\lambda_1 & -14 & -4 & 0 \\ 3 & -5-\lambda_1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -14 & -4 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Iz zadnje vrstice matrike sledi, da je $z = 0$. Drugo vrstico matrike lahko prepišemo v enačbo $3x - 6y - 2z = 0$ in iz nje lahko izrazimo $3x = 6y + 2z = 6y$. Če označimo $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobimo $x = 2\alpha$. Vrednosti $x = 2\alpha$, $y = \alpha$ in $z = 0$ rešijo tudi enačbo, ki pripada prvi vrstici matrike. Torej so rešitve sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za lastni vektor v_1 si lahko izberemo eno od neničelnih rešitev sistema, npr.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo razširjeno matriko sistema za lastni vektor, ki pripada dvojni lastni vrednosti $\lambda_{2,3} = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8-\lambda_{2,3} & -14 & -4 & 0 \\ 3 & -5-\lambda_{2,3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_{2,3} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -14 & -4 & 0 \\ 3 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker je druga vrstica le večkratnik prve, imamo samo eno neodvisno enačbo $3x - 7y - 2z = 0$. Če označimo $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, in $z = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, dobimo

$$x = \frac{7}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{7}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta.$$

Rešitve sistema so torej

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3}\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\beta \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{3}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Iz dobljenih rešitev si lahko izberemo dva linearno neodvisna vektorja, npr.

$$v_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ker različnim lastnim vrednostim pripadajo linearno neodvisni lastni vektorji, so v_1, v_2 in v_3 linearno neodvisni. Torej se matriko A da diagonalizirati.

39. (2. izpit, 7.2.2014) Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo $AX = B^T + 2X$.

Rešitev: Najprej preoblikujmo dano enačbo:

$$\begin{aligned} AX &= B^T + 2X, \\ AX - 2X &= B^T, \\ (A-2I)X &= B^T, \\ X &= (A-2I)^{-1}B^T. \end{aligned}$$

Pri prehodu iz predzadnje v zadnjo vrstico smo privzeli, da je matrika $A - 2I$ obrnljiva. Matriko $(A-2I)^{-1}$ izračunamo tako, da zapišemo razširjeno matriko $[A-2I|I]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v matriko $[I|(A-2I)^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-3) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ + \\ (8)\ (-3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ (-2) \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 26 & -2 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Potem je

$$X = (A-2I)^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 26 & -2 & 19 \\ -11 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 17 & -51 \\ -28 & -7 & 22 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Opomba: Ker je v enačbi $(A-2I)X = B^T$ matrika $(A-2I)$ levo od iskane matrike X, lahko pridemo do rešitve tudi hitreje. Zapišemo razširjeno matriko $[A-2I|B^T]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v obliko $[I|X]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot (-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -28 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 66 & 17 & -51 \\ 0 & 1 & 0 & -28 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

40. (4. izpit, 1.9.2014) Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo $AX = A^T + 4X$.

Rešitev: Najprej preoblikujmo dano enačbo:

$$\begin{aligned} AX &= A^T + 4X, \\ AX - 4X &= A^T, \\ (A-4I)X &= A^T, \\ X &= (A-4I)^{-1}A^T. \end{aligned}$$

Pri prehodu iz predzadnje v zadnjo vrstico smo privzeli, da je matrika $A-4I$ obrnljiva. Izračunajmo matriko $(A-4I)^{-1}$ tako, da zapišemo razširjeno matriko

$[A-4I|I]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v matriko $[I|(A-4I)^{-1}]$:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (2) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ (-1) \\ |\cdot(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right].
$$

Potem je

$$
X = (A-4I)^{-1}B^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 19 & 12 \\ 3 & -4 & -4 \\ 0 & -13 & -9 \end{bmatrix}.
$$

Opomba: Ker je v enačbi $(A-4I)X = A^T$ matrika $(A-4I)$ levo od iskane matrike X, lahko pridemo do rešitve tudi hitreje. Zapišemo razširjeno matriko $[A-4I|A^T]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v obliko $[I|X]$:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -9 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (2) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 13 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 15 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 13 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ (-1) \\ |\cdot(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 19 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -13 & -9 \end{array}\right].
$$

41. (1. kolokvij, 1.12.2014) Izračunajte matriko X, ki zadošča matrični enačbi $AXA = 4A^T$, pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej preoblikujmo dano enačbo:

$$\begin{aligned} AXA &= 4A^T, \\ AX &= 4A^TA^{-1}, \\ X &= A^{-1}(4A^TA^{-1}), \\ X &= 4A^{-1}A^TA^{-1}. \end{aligned}$$

Pri preoblikovanju enačbe smo privzeli, da je matrika A obrnljiva. Izračunajmo matriko A^{-1} tako, da zapišemo razširjeno matriko $[A|I]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v matriko $[I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \;\; | \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Potem je

$$\begin{aligned}
X &= 4A^{-1}A^TA^{-1} = (2A^{-1})A^T(2A^{-1}) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

42. (1. izpit, 29.1.2015) Poiščite vse lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

in pripadajoče lastne vektorje. Ali se matriko A da diagonalizirati? Odgovor utemeljite.

Rešitev: Najprej izračunamo lastne vrednosti, ki so ničle enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$. Pri računanju determinante uporabimo razvoj po prvi vrstici (stolpcu), saj ima determinanta v prvi vrstici (stolpcu) dve ničli:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\lambda \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda((-3-\lambda)(-4-\lambda) - 12) = \lambda(\lambda^2 + 7\lambda) = \lambda^2(\lambda + 7).
\end{aligned}$$

Torej ima matrika A lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = 0$ in $\lambda_3 = -7$. Za vsako od lastnih vrednosti določimo sedaj še prirejene lastne vektorje v, ki so rešitve sistema $Av = \lambda v$.

Zapišimo razširjeno matriko sistema za lastni vektor, ki pripada dvojni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda_{1,2} & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4-\lambda_{1,2} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Ker je prva vrstica ničelna in je tretja vrstica le večkratnik druge, imamo samo eno neodvisno enačbo $-3y + 2z = 0$. Če označimo $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, in $z = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, dobimo $y = \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}\beta$. Rešitve sistema so

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{2}{3}\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Izmed dobljenih rešitev si lahko izberemo dva linearno neodvisna vektorja, npr.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo razširjeno matriko sistema še za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_3 = -7$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0-\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda_3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4-\lambda_3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Iz prve vrstice matrike sledi, da je $x = 0$. Ker je tretja vrstica večkratnik druge, imamo samo še eno neodvisno enačbo $4y + 2z = 0$. Če označimo $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, iz enačbe sledi $z = -2y = -2\alpha$. Rešitve sistema so

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za lastni vektor v_3 si lahko izberemo eno od neničelnih rešitev sistema, npr.

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ker različnim lastnim vrednostim pripadajo linearno neodvisni lastni vektorji, so v_1, v_2 in v_3 linearno neodvisni. Torej se matriko A da diagonalizirati.

43. (2. izpit, 12.2.2015) Določite število β tako, da bo imel sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ \beta x & + & y & - & 2z & = & 2+\beta \end{array}$$

neskončno mnogo rešitev in zapišite množico rešitev.

Rešitev: Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \beta & 1 & -2 & 2+\beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ \beta & 1 & -2 & 2+\beta \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-2\beta & -2-\beta & 2+\beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3+\beta & 3-\beta \end{array}\right].$$

Sistem ima neskončno rešitev, ko so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle. To velja za $\beta = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $-y - z = 1$. Če upoštevamo, da je $z = t$, dobimo $y = -1 - z = -1 - t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x + 2y + z = 0$ in zato $x = -2y - z = 2 + 2t - t = 2 + t$. Množico rešitev lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ -1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

44. (4. izpit, 31.8.2015) Ugotovite, pri katerih vrednostih parametra β je naslednji sistem rešljiv in zapišite vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & -1 \\ 3x & & & - & 6z & = & 3+3\beta \\ 2x & - & \beta y & + & (\beta-4)z & = & 2 \end{array}$$

Rešitev: Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 3+3\beta \\ 2 & -\beta & \beta-4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \overset{(3)}{\longrightarrow}{}^{(2)} \\ \hookleftarrow + \\ \longleftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3\beta \\ 0 & 2-\beta & \beta-2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(\frac{1}{3}) \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \beta \\ 0 & 2-\beta & \beta-2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \overset{(\beta-2)}{\longrightarrow} \\ \hookleftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\beta-2) \end{array}\right].$$

Zadnji vrstici razširjene matrike pripada enačba $0 = \beta(\beta-2)$. Torej je sistem rešljiv, samo če je $\beta = 0$ ali $\beta = 2$.

(a) Za $\beta = 0$ je zgornjetrikotna razširjena matrika enaka

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle, ima sistem neskončno rešitev. Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $y - z = 0$. Če upoštevamo, da je $z = t$, dobimo $y = z = t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x - y - z = 1$ in zato $x = 1 + y + z = 1 + t + t = 1 + 2t$. Vse rešitve sistema lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Za $\beta = 2$ je zgornjetrikotna razširjena matrika enaka

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle, ima sistem neskončno rešitev. Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $y - z = 2$. Če upoštevamo, da je $z = t$, dobimo $y = 2 + z = 2 + t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x - y - z = 1$ in zato $x = 1 + y + z = 1 + 2 + t + t = 3 + 2t$. Rešitve sistema lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2t \\ 2+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

45. (2. kolokvij, 18.1.2016) Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Poiščite vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

(b) Ali matriko A lahko diagonaliziramo? Če lahko, poiščite tako obrnljivo matriko P in diagonalno matriko D, da velja $A = PDP^{-1}$.

(c) Izračunajte A^{2016}.

Rešitev:

(a) Najprej izračunajmo lastne vrednosti, ki so ničle enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$. Pri računanju determinante uporabimo razvoj po prvi vrstici, saj ima determinanta v prvi vrstici dve ničli:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda). \end{aligned}$$

Torej ima matrika A lastne vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Za vsako od lastnih vrednosti določimo sedaj še prirejene lastne vektorje v, ki so rešitve sistema $Av = \lambda v$.

Zapišimo razširjeno matriko sistema za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Iz prve (zadnje) vrstice matrike sledi, da je $x = 0$. Drugo vrstico matrike lahko prepišemo v enačbo $x + y - 2z = 0$ in iz nje lahko izrazimo $y = -x + 2z$. Če označimo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobimo $y = 2\alpha$. Množica rešitev sistema je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za lastni vektor v_1 si lahko izberemo eno od neničelnih rešitev sistema, npr.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo razširjeno matriko sistema za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_2 = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Iz prve vrstice matrike sledi, da je $x = 0$. Drugo vrstico matrike lahko prepišemo v enačbo $2x - 2z = 0$ in iz nje lahko izrazimo $z = x = 0$. Ker nimamo nobenega pogoja za y, si ga lahko še poljubno izberemo. Če označimo $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, lahko množico rešitev sistema zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za lastni vektor v_2 si lahko izberemo eno od neničelnih rešitev sistema, npr.

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo razširjeno matriko sistema še za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_3 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Zadnjo vrstico lahko prepišemo v enačbo $-x + z = 0$. Če označimo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobimo $x = z = \alpha$. Drugo vrstico matrike lahko prepišemo v enačbo $2x+2y-2z = 0$ in iz nje lahko izrazimo $y = z - x = \alpha - \alpha = 0$. Rešitve sistema lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za lastni vektor v_3 si lahko izberemo eno od neničelnih rešitev sistema, npr.

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ker različnim lastnim vrednostim pripadajo linearno neodvisni lastni vektorji, so v_1, v_2 in v_3 linearno neodvisni. Torej se matriko A da diagonalizirati. Diagonalno matriko D dobimo tako, da po diagonali zapišemo lastne vrednosti. V matriko P pa v stolpce v ustreznem vrstnem redu zapišemo prirejene lastne vektorje:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opomba: Ker smo si vrstni red lastnih vrednosti poljubno izbrali in ker smo za prirejene lastne vektorje izbrali samo eno od možnih rešitev, lahko dobimo različne matrike D in P, za katere velja $A = PDP^{-1}$.

(c) Ker je

$$\begin{aligned} A^{2016} &= PD^{2016}P^{-1} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2016} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 0^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2016} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = PD^2P^{-1} = A^2, \end{aligned}$$

je

$$A^{2016} = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

46. (1. izpit, 28.1.2016) Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo $AX = B^T + X$.

Rešitev: Najprej preoblikujmo dano enačbo:

$$\begin{aligned} AX &= B^T + X, \\ AX - X &= B^T, \\ (A-I)X &= B^T, \\ X &= (A-I)^{-1}B^T. \end{aligned}$$

Pri prehodu iz predzadnje v zadnjo vrstico smo privzeli, da je matrika $A-I$ obrnljiva. Matriko $(A-I)^{-1}$ izračunamo tako, da zapišemo razširjeno matriko $[A-I|I]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v matriko $[I|(A-I)^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ + \\ (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Potem je

$$X = (A-I)^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -5 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Opomba: Ker je v enačbi $(A-I)X = B^T$ matrika $(A-I)$ levo od iskane matrike X, lahko pridemo do rešitve tudi hitreje. Zapišemo razširjeno matriko $[A-I|B^T]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v obliko $[I|X]$.

47. (3. izpit, 13.6.2016) Obravnavajte in rešite sistem naslednjih enačb v odvisnosti od parametra a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & az & = & 2 \\ x & + & ay & + & z & = & a+1 \end{array}$$

Rešitev: Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 2 \\ 1 & a & 1 & a+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 2 \\ 0 & a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1 \end{array}\right].$$

Zadnji vrstici pripada enačba

$$(a-1)(a+1)z = -(a+1). \tag{18}$$

(a) Če je $a = 1$, je enačba (18) protislovna, torej sistem nima rešitve.

(b) Sistem ima neskončno rešitev, ko so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle. To velja za $a = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $y + 2z = 2$. Če upoštevamo, da je $z = t$, dobimo $y = 2 - 2z = 2 - 2t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x - y + z = 0$ in zato $x = y - z = 2 - 2t - t = 2 - 3t$. Rešitve sistema lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3t \\ 2-2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(c) Poglejmo si še primer, ko $a \neq 1$ in $a \neq -1$. V tem primeru lahko enačbo (18) delimo z $(a-1)(a+1)$ in dobimo

$$z = -\frac{1}{a-1} = \frac{1}{1-a}.$$

Drugo vrstico zgornjetrikotne matrike lahko prepišemo v enačbo $y + (1-a)z = 2$. Iz nje lahko izrazimo

$$y = 2 - (1-a)z = 2 - \frac{1-a}{1-a} = 1.$$

Iz prve vrstice sledi, da je $x - y + z = 0$ in zato

$$x = y - z = 1 - \frac{1}{1-a} = \frac{-a}{1-a}.$$

Torej ima sistem natanko eno rešitev

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a}{1-a} \\ 1 \\ \frac{1}{1-a} \end{bmatrix}.$$

48. (4. izpit, 5.9.2016) Poiščite vse vrednosti parametra a, za katere je dana determinanta enaka 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & a & 3 \\ -1 & 1 & 2a-2 & -a \end{vmatrix}$$

Rešitev: Determinanto izračunamo s pomočjo Gaussove eliminacijske metode:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & a & 3 \\ -1 & 1 & 2a-2 & -a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & a & 3 \\ -1 & 1 & 2a-2 & -a \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & a-1 & 1 \\ 0 & 4 & 2a-1 & 2-a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2a & 2-a \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 \cdot a \cdot (-a) = 4a^2.$$

Determinanta bo enaka 2, če bo $4a^2 = 2$, torej za $a_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Opomba: Determinanto bi lahko računali tudi z razvojem po prvi vrstici, ki vsebuje dve ničli. Dobljeni determinanti dimenzije 3×3 bi nato lahko izračunali s pomočjo Gaussove eliminacijske metode.

49. (1. kolokvij, 5.12.2016) Določite vrednost parametra a, da matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ a & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

ne bo obrnljiva.

Rešitev: Matrika A ne bo obrnljiva natanko tedaj, ko bo $\det A = 0$. Determinanto začnemo računati z Gaussovo eliminacijsko metodo. Ko imamo v prvem stolpcu dve ničli, pa nadaljujemo z razvojem po prvem stolpcu:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ a & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{ll} (-5) & (a) \\ + & \\ & + \end{array} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -1+a & -3+a \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1+a & -3+a \end{vmatrix} \\
&= -\left((-4)(-3+a) - (-3)(-1+a)\right) \\
&= -(12 - 4a - 3 + 3a) = -(9-a).
\end{aligned}$$

Matrika A ni obrnljiva za $a = 9$.

Opomba: Determinanto bi lahko izračunali tudi samo z Gaussovo eliminacijsko metodo ali pa samo z razvojem po katerikoli vrstici ali stolpcu.

50. (1. kolokvij, 5.12.2016) Obravnavajte in rešite sistem naslednjih enačb v odvisnosti od parametra a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & (a+1)z & = & 2 \\ 2x & - & ay & + & 2(a+1)z & = & 2 \end{array}$$

Rešitev: Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 2 & -a & 2(a+1) & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -a & 2a & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2a+a^2 & a \end{array}\right].$$

Zadnji vrstici pripada enačba

$$a(a+2)z = a. \tag{19}$$

(a) Če je $a = -2$, je enačba (19) protislovna, torej sistem nima rešitve.

(b) Sistem ima neskončno rešitev, ko so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle. To velja za $a = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Iz druge vrstice sledi, da je $y = 1$. Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x + z = 1$ in zato $x = 1 - z = 1 - t$. Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(c) Poglejmo si še primer, ko $a \neq 0$ in $a \neq -2$. V tem primeru lahko enačbo (19) delimo z $a(a+2)$ in dobimo

$$z = \frac{1}{a+2}.$$

Drugo vrstico zgornjetrikotne matrike lahko prepišemo v enačbo $y + az = 1$. Iz nje lahko izrazimo

$$y = 1 - az = 1 - \frac{a}{a+2} = \frac{2}{a+2}.$$

Iz prve vrstice sledi, da je $x + z = 1$ in zato

$$x = 1 - z = 1 - \frac{1}{a+2} = \frac{a+1}{a+2}.$$

Torej ima sistem natanko eno rešitev

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+1}{a+2} \\ \frac{2}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}.$$

51. (1. izpit, 23.1.2017) Izračunajte lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiščite kako obrnljivo matriko P in diagonalno matriko D, da bo $A = PDP^{-1}$. Z njihovo pomočjo izračunate A^{2017}.

Rešitev: Najprej izračunamo lastne vrednosti, ki so ničle enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$. Pri računanju determinante uporabimo razvoj po prvi vrstici, saj ima determinanta v prvi vrstici dve ničli:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Torej ima matrika A lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Za vsako od lastnih vrednosti določimo sedaj še prirejene lastne vektorje v, ki so rešitve sistema $Av = \lambda v$.

Zapišimo razširjeno matriko sistema za lastni vektor, ki pripada dvojni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda_{1,2} & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -\lambda_{1,2} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Ker je prva vrstica ničelna in je tretja vrstica enaka drugi, imamo samo eno neodvisno enačbo

$$2x - y - z = 0.$$

Če označimo $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, in $y = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, dobimo $z = 2x - y = 2\alpha - \beta$. Množica rešitev sistema je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Iz dobljene množice rešitev si lahko izberemo dva linearno neodvisna vektorja, npr.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo razširjeno matriko sistema še za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_3 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda_3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -\lambda_3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Iz prve vrstice sledi, da je $x = 0$. Potem iz druge in tretje vrstice sledi, da je $y = z$. Če označimo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobimo $y = \alpha$. Rešitve sistema lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za lastni vektor v_3 si lahko izberemo eno od neničelnih rešitev sistema, npr.

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ker različnim lastnim vrednostim pripadajo linearno neodvisni lastni vektorji, so v_1, v_2 in v_3 linearno neodvisni. Torej se matriko A da diagonalizirati. Diagonalno matriko D dobimo tako, da po diagonali zapišemo lastne vrednosti. V matriko P pa v stolpce v ustreznem vrstnem redu zapišemo prirejene lastne vektorje:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opomba: Ker smo si vrstni red lastnih vrednosti poljubno izbrali in ker smo za prirejene lastne vektorje izbrali samo eno od možnih rešitev, lahko dobimo različne matrike D in P, za katere velja $A = PDP^{-1}$.

Izračunajmo še A^{2017}:

$$
\begin{aligned}
A^{2017} &= PD^{2017}P^{-1} = P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^{2017} P^{-1} = P\begin{bmatrix}1^{2017} & 0 & 0\\ 0 & 1^{2017} & 0\\ 0 & 0 & (-1)^{2017}\end{bmatrix} P^{-1}\\
&= P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A.
\end{aligned}
$$

52. (2. izpit, 6.2.2017) Obravnavajte in rešite sistem naslednjih enačb v odvisnosti od parametra a:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & - & 2y & + & z & = & 2\\
2x & - & 3y & + & (a+2)z & = & 5\\
x & - & (a+2)y & & & = & 1
\end{array}
$$

Rešitev: Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 2 & -3 & a+2 & 5\\ 1 & -(a+2) & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & -a & -1 & -1\end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1\end{array}\right].
$$

Zadnji vrstici pripada enačba

$$
(a-1)(a+1)z = a-1. \tag{20}
$$

(a) Če je $a = -1$, je enačba (20) protislovna, torej sistem nima rešitve.

(b) Sistem ima neskončno rešitev, ko so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle. To velja za $a = 1$:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].
$$

Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $y+z = 1$, torej $y = 1-z = 1-t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x-2y+z = 2$ in zato $x = 2+2y-z = 2+2-2t-t = 4-3t$. Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

(c) Poglejmo si še primer, ko $a \neq 1$ in $a \neq -1$. V tem primeru lahko enačbo (20) delimo z $(a-1)(a+1)$ in dobimo

$$z = \frac{1}{a+1}.$$

Drugo vrstico zgornjetrikotne matrike lahko prepišemo v enačbo $y + az = 1$. Iz nje lahko izrazimo

$$y = 1 - az = 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1}.$$

Iz prve vrstice sledi, da je $x - 2y + z = 2$ in zato

$$x = 2 + 2y - z = 2 + \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{2a+3}{a+1}.$$

Torej ima sistem natanko eno rešitev

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a+3}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} \end{bmatrix}.$$

53. (3. izpit, 13.6.2017) Rešite matrično enačbo $AX = 2X + B^T$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej preoblikujemo dano enačbo:

$$\begin{aligned} AX &= 2X + B^T, \\ AX - 2X &= B^T, \\ (A-2I)X &= B^T, \\ X &= (A-2I)^{-1}B^T. \end{aligned}$$

Pri prehodu iz predzadnje v zadnjo vrstico smo privzeli, da je matrika $A-2I$ obrnljiva. Matriko $(A-2I)^{-1}$ izračunamo tako, da zapišemo razširjeno matriko $[A-2I|I]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v matriko $[I|(A-2I)^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Potem je

$$X=(A-2I)^{-1}B^T=\begin{bmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 8 \\ 2 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Opomba: Ker je v enačbi $(A-2I)X=B^T$ matrika $(A-2I)$ levo od iskane matrike X, lahko pridemo do rešitve tudi hitreje. Zapišemo razširjeno matriko $[A-2I|B^T]$ in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedemo v obliko $[I|X]$.

54. (4. izpit, 28.8.2017) Rešite sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 5x & - & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1. \end{array}$$

Kakšen je geometrijski pomen rešitve?

Rešitev: Zapišimo razširjeno matriko sistema in jo z Gaussovo eliminacijsko metodo prevedimo v zgornjetrikotno matriko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ (-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle, ima sistem neskončno rešitev. Označimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Iz druge vrstice sledi, da je $-y - z = -1$. Če upoštevamo, da je $z = t$, dobimo $y = 1 - z = 1 - t$. Iz prve vrstice razberemo, da je $x + z = 1$ in zato $x = 1 - z = 1 - t$. Množico rešitev lahko zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Geometrijsko to pomeni, da se ravnine, katerih enačbe so vrstice sistema, sekajo v premici z enačbo

$$\overrightarrow{r}(t) = (1,1,0) + t(-1,-1,1),\ t \in \mathbb{R}.$$

8 Zaporedja

55. (2. kolokvij, 19.1.2015) Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \frac{a_n}{5}$, $n \geq 1$. Utemeljite konvergenco zaporedja in izračunajte njegovo limito.

Rešitev: Če je zaporedje monotono in omejeno, potem konvergira. Izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2,\\
a_2 &= 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5},\\
a_3 &= 2 + \frac{\frac{12}{5}}{5} = 2 + \frac{12}{25} = \frac{62}{25}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da zaporedje za prve tri člene narašča. Z uporabo matematične indukcije dokažimo, da zaporedje ves čas narašča, torej da je $a_n < a_{n+1}$ za vsako naravno število n. Da neenakost $a_1 < a_2$ drži, smo se prepričali že zgoraj. Dokazati je treba le še, da velja $a_{k+1} < a_{k+2}$, če le velja indukcijska predpostavka $a_k < a_{k+1}$, $k \geq 1$. To naredimo tako, da preoblikujemo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned}
a_k &< a_{k+1}, \text{ (delimo s 5)}\\
\frac{a_k}{5} &< \frac{a_{k+1}}{5}, \text{ (prištejemo 2)}\\
2 + \frac{a_k}{5} &< 2 + \frac{a_{k+1}}{5}.
\end{aligned}$$

Leva stran zadnje neenakosti je enaka a_{k+1}, desna pa a_{k+2}, zato je $a_{k+1} < a_{k+2}$. Po principu matematične indukcije smo dokazali, da je zaporedje naraščajoče.
Za dokaz konvergence je potrebno dokazati še, da je zaporedje navzgor omejeno. Razmislimo, kaj bi lahko bila zgornja meja zaporedja. Če bi zaporedje imelo limito, označimo jo z A, bi za to limito zaradi definicije zaporedja $a_{n+1} = 2 + \frac{a_n}{5}$ veljala enakost $A = 2 + \frac{A}{5}$. Iz te enakosti izračunamo $A = \frac{5}{2}$, kar je (edini) kandidat za limito. Zgoraj smo pokazali, da zaporedje narašča. Zdaj pa pokažimo, da je navzgor omejeno z nekim številom, ki je večje ali enako $\frac{5}{2}$. Zaradi lepšega računa predpostavimo, da je navzgor omejeno s 3 in hipotezo dokažimo s pomočjo matematične indukcije. Dokazati je treba torej, da je $a_n < 3$ za vsako naravno število n. Očitno je, da izjava drži za a_1. Dokazati je treba še, da iz indukcijske predpostavke $a_k < 3$

$(k \geq 1)$ sledi $a_{k+1} < 3$. Preoblikujmo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} a_k &< 3, \text{ (delimo s 5)} \\ \frac{a_k}{5} &< \frac{3}{5}, \text{ (prištejemo 2)} \\ 2 + \frac{a_k}{5} &< 2 + \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Leva stran je enaka a_{k+1}, desna stran pa $2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$, kar pa je manj od $\frac{15}{5} = 3$. Zadnja neenakost se da zapisati v obliki:

$$a_{k+1} < \frac{13}{5} < 3.$$

Tako smo dokazali tudi omejenost in s tem konvergenco zaporedja.
Limita zaporedja je enaka $A = \frac{5}{2}$ (saj je to bil edini kandidat za limito).

56. (2. kolokvij, 18.1.2016) Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 3}{7},\ n \geq 1.$$

Pokažite, da je zaporedje monotono in omejeno. Utemeljite konvergenco zaporedja in poiščite njegovo limito.

Rešitev: Preverimo, da je zaporedje monotono. Izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= \frac{2 \cdot 4 + 3}{7} = \frac{11}{7}, \\ a_3 &= \frac{2 \cdot \frac{11}{7^2} + 3}{7} = \frac{389}{343}. \end{aligned}$$

Vidimo, da zaporedje za prve tri člene pada. Z uporabo matematične indukcije dokažimo, da zaporedje ves čas pada, torej da neenakost $a_n > a_{n+1}$ drži za vsako naravno število n. Da je $a_1 > a_2$, smo se prepričali že zgoraj. Dokazati je treba še, da velja $a_{k+1} > a_{k+2}$, če le velja indukcijska predpostavka $a_k > a_{k+1}$ $(k \geq 1)$. Pri dokazu bomo uporabili dejstvo, da za pozitivni števili a in b, za kateri je $a > b$, velja $a^2 > b^2$. Opazimo še, da so zaradi definicije zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vsi členi zaporedja pozitivni. Preoblikujmo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} a_k &> a_{k+1}, \text{ (kvadriramo)} \\ a_k^2 &> a_{k+1}^2, \text{ (pomnožimo z 2 in prištejemo 3)} \\ 2a_k^2 + 3 &> 2a_{k+1}^2 + 3, \text{ (delimo s 7)} \\ \frac{2a_k^2 + 3}{7} &> \frac{2a_{k+1}^2 + 3}{7}. \end{aligned}$$

Leva stran zadnje neenakosti je enaka a_{k+1}, desna pa a_{k+2}, zato je $a_{k+1} > a_{k+2}$. Po principu matematične indukcije smo dokazali, da je zaporedje padajoče.
Zaporedje je navzgor omejeno z a_1, saj pada, navzdol pa z 0 (sledi iz definicije zaporedja). Ker je zaporedje padajoče in (navzdol) omejeno je konvergentno.
Označimo $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Na levi in desni strani enakosti $a_{n+1} = \frac{2a_n^2+3}{7}$ imamo člene dveh zaporedij, ki imata isto limito. Zato velja

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n^2 + 3}{7} = \frac{2\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 + 3}{7}.$$

Torej je $A = \frac{2A^2+3}{7}$. Rešitvi dobljene kvadratne enačbe $A_1 = 3$ in $A_2 = \frac{1}{2}$ sta tako kandidatki za limito zaporedja. Ker je prvi člen zaporedja enak 2 in zaporedje pada, število 3 ne more biti limita. Limita zaporedja je torej $\frac{1}{2}$.

57. (4. izpit, 5.9.2016) Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{6n^2 + 1}{1 - 2n^2}, \quad n \geq 1.$$

Pokažite, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno. Določite limito zaporedja. Ugotovite, od katerega člena naprej ležijo členi zaporedja v intervalu s središčem v limiti in polmerom $\varepsilon = 0.01$.

Rešitev: Zaporedje je naraščajoče natanko tedaj, ko za vsako naravno število n velja neenakost $a_n < a_{n+1}$. Pri spodnjem računu uporabimo dejstvo, da sta za vsako naravno število n vrednosti izrazov $(1 - 2n^2)$ in $(1 - 2(n+1)^2)$ negativni in je zato njun produkt pozitiven. Računamo:

$$\begin{aligned}
a_n &< a_{n+1}, \\
\frac{6n^2+1}{1-2n^2} &< \frac{6(n+1)^2+1}{1-2(n+1)^2}, \\
(6n^2+1)(1-2(n^2+2n+1)) &< (6(n^2+2n+1)+1)(1-2n^2), \\
(6n^2+1)(-2n^2-4n-1) &< (6n^2+12n+7)(1-2n^2), \\
-12n^4-24n^3-8n^2-4n-1 &< -12n^4-24n^3-8n^2+12n+7, \\
0 &< 16n+8.
\end{aligned}$$

Ker je dobljena neenakost resnična za vsako naravno število n, je zaporedje naraščajoče. Zaporedje je navzgor omejeno z 0, saj je za vsako naravno število n števec ulomka $\frac{6n^2+1}{1-2n^2}$ pozitiven, imenovalec pa negativen. Izračunamo limito:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+1}{1-2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2} = -3.$$

Zdaj je potrebno poiskati vsa naravna števila n, za katera velja $|a_n-(-3)|<0.01$. V spodnjem računu uporabimo dejstvo, da je izraz $(1-2n^2)$ negativen za vsako naravno število n in tako je $|1-2n^2| = -(1-2n^2) = 2n^2-1$:

$$\begin{aligned}
|a_n-(-3)| &< 0.01, \\
\left|\frac{6n^2+1}{1-2n^2}+3\right| &< 0.01, \\
\left|\frac{6n^2+1+3(1-2n^2)}{1-2n^2}\right| &< \frac{1}{100}, \\
\frac{4}{|1-2n^2|} &< \frac{1}{100}, \\
\frac{4}{2n^2-1} &< \frac{1}{100}, \ \text{(pomnožimo s } 100\cdot(2n^2-1)) \\
400 &< 2n^2-1, \\
401 &< 2n^2, \\
200.5 &< n^2.
\end{aligned}$$

Najmanjše naravno število, ki ustreza neenakosti v zadnji vrstici, je $n=15$, saj je $14^2 < 200.5 < 15^2$. V danem intervalu ležijo vsi členi zaporedja od a_{15} naprej oziroma vsi členi zaporedja, razen prvih 14.

58. (1. izpit, 23.1.2017) Za rekurzivno podano zaporedje $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ pokažite, da je omejeno in monotono. Utemeljite konvergenco zaporedja in izračunajte njegovo limito.

Rešitev: Izračunajmo vrednosti prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}, \\ a_3 &= 6 - \frac{5}{\frac{7}{2}} = \frac{32}{7}. \end{aligned}$$

Pokažimo najprej, da je zaporedje omejeno. Pri tem si pomagamo z naslednjim razmislekom. Če bi zaporedje imelo limito, označimo jo z A, bi zaradi definicije zaporedja $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ veljalo $A = 6 - \frac{5}{A}$. Rešitvi dobljene kvadratne enačbe, $A_1 = 1$ in $A_2 = 5$, sta torej kandidatki za limito. Ker je prvi člen zaporedja enak 2 (in velja $2 \in [1, 5]$), dokažimo, da za vsako naravno število n velja $1 < a_n < 5$. Neenakost očitno velja pri $n = 1$. Če velja (indukcijska) predpostavka $1 < a_k < 5$, mora veljati $1 < a_{k+1} < 5$. Pri spodnjem računu bomo uporabili dejstvo, da za pozitivni števili a in b, za kateri je $a < b$, velja $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Računamo:

$$\begin{aligned} 1 < a_k &< 5, \ \text{(invertiramo)} \\ 1 > \frac{1}{a_k} &> \frac{1}{5}, \ \text{(pomnožimo z } (-5)) \\ -5 < -\frac{5}{a_k} &< -1, \ \text{(prištejemo 6)} \\ 1 < 6 - \frac{5}{a_k} &< 5. \end{aligned}$$

Ker je $6 - \frac{5}{a_k} = a_{k+1}$, smo po principu matematične indukcije pokazali, da je zaporedje je omejeno (navzdol z 1, navzgor pa s 5).

Zdaj se lotimo dokaza monotonosti. Iz prej izračunanih prvih členov vidimo, da zaporedje za prve tri člene narašča. Z uporabo matematične indukcije dokažimo, da zaporedje ves čas narašča, torej da trditev $a_n < a_{n+1}$ drži za vsako naravno število n. Da izjava $a_1 < a_2$ drži, smo se že prepričali. Dokazati je treba še, da velja $a_{k+1} < a_{k+2}$, če le velja indukcijska predpostavka $a_k < a_{k+1}$ $(k \geq 1)$. Pri računu bomo uporabili dejstvo, da so členi zaporedja pozitivni. Preoblikujmo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned}
a_k &< a_{k+1}, \ \text{(invertiramo)}\\
\frac{1}{a_k} &> \frac{1}{a_{k+1}}, \ \text{(pomnožimo z } -5)\\
-\frac{5}{a_k} &< -\frac{5}{a_{k+1}}, \ \text{(prištejemo 6)}\\
6-\frac{5}{a_k} &< 6-\frac{5}{a_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Leva stran zadnje neenakosti je enaka a_{k+1}, desna pa a_{k+2}, zato je $a_{k+1} < a_{k+2}$. Po principu matematične indukcije smo dokazali, da je zaporedje naraščajoče.
Spomnimo se, da sta kandidatki za limito zaporedja $A_1 = 1$ in $A_2 = 5$. Ker je prvi člen zaporedja enak 2 in zaporedje narašča, število 1 ne more biti njegova limita. Limita zaporedja je torej število 5.

9 Vrste

59. (2. izpit, 7.2.2014) Pokažite, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ konvergentna.

Rešitev: Uporabimo korenski test:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}}$$
$$= \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2} = \frac{1}{e^2}.$$

Na zadnjem koraku smo uporabili znano limito $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$: če vzamemo $k = \frac{n}{2}$ velja, da $k\to\infty$ natanko takrat, ko $n\to\infty$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e.$$

Ker je $\frac{1}{e^2} < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Torej nam korenski test pove, da je dana vrsta konvergentna.

60. (2. kolokvij, 19.1.2015) Pokažite, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{n^2(n+1)} \tag{21}$$

zadošča pogojem Leibnizovega izreka. Izračunajte njeno tretjo delno vsoto s_3 in ocenite za koliko se s_3 največ razlikuje od prave vsote vrste. Pokažite še, da vrsta ni absolutno konvergentna.

Rešitev: Naj bo $a_n = \frac{n^2+1}{n^2(n+1)}$. Preveriti moramo dva pogoja: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ in

2) $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak n. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2(n+1)} \quad \text{(števec in imenovalec delimo z } n^3\text{)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Neenakost $a_{n+1} \leq a_n$ prepišemo v

$$\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2(n+2)} \leq \frac{n^2+1}{n^2(n+1)}.$$

Dobljena neenakost je ekvivalentna neenakosti

$$n^2((n+1)^2+1) \leq (n+1)(n+2)(n^2+1) \quad \text{ali}$$

$$n^2(n^2+2n+2) \leq (n^2+1)(n^2+3n+2).$$

Zadnja neenakost pa velja, ker je $n^2 \leq n^2+1$, $n^2+2n+2 \leq n^2+3n+2$ za vsak $n \geq 1$ in so vsi izrazi pozitivni. Ker je zadoščeno obema pogojema Leibnizovega izreka, je podana vrsta (21) konvergentna.

Opomba: Neenakost $a_{n+1} \leq a_n$ lahko preverimo tudi na drug način. Najprej prepišemo to neenakost v obliko $a_n - a_{n+1} \geq 0$ in damo dobljeno razliko ulomkov na skupni imenovalec:

$$\begin{aligned}
\frac{n^2+1}{n^2(n+1)} - \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2(n+2)} &\geq 0, \\
\frac{(n^2+1)(n+1)(n+2) - ((n+1)^2+1)n^2}{n^2(n+1)^2(n+2)} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Ker je imenovalec zgornjega ulomka pozitiven, je zadnja neenakost ekvivalentna neenakosti

$$(n^2+1)(n+1)(n+2) - ((n+1)^2+1)n^2 \geq 0.$$

To neenakost lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned}
(n^2+1)(n^2+3n+2) - (n^2+2n+2)n^2 &\geq 0, \\
n^4+3n^3+3n^2+3n+2-(n^4+2n^3+2n^2) &\geq 0, \\
n^3+n^2+3n+2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Dobljena neenakost pa očitno velja za vsak $n \geq 1$.

Izračunajmo s_3:

$$s_3 = (-1)^2 \frac{1+1}{1(1+1)} + (-1)^3 \frac{4+1}{4(2+1)} + (-1)^4 \frac{9+1}{9(3+1)} = 1 - \frac{5}{12} + \frac{5}{18} = \frac{31}{36}.$$

Uporabimo oceno $|s - s_n| < a_{n+1}$ za $n = 3$. Ker je $a_4 = \frac{16+1}{16(4+1)} = \frac{17}{80}$, dobimo oceno

$$|s - s_3| < \frac{17}{80}.$$

Torej se s_3 po absolutni vrednosti od dejanske vsote vrste razlikuje za manj kot $\frac{17}{80}$.
Iz definicije absolutne konvergence sledi, da moramo pokazati, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2(n+1)}$$

divergentna. Naj bo $b_n = \frac{1}{n+1}$. Ker je $n^2 + 1 > n^2$, imamo $\frac{n^2+1}{n^2} > 1$, od koder sledi, da je $a_n > b_n$. Ker je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna (harmonična vrsta z manjkajočim 1. členom), iz primerjalnega testa sledi, da je tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna. Torej podana vrsta (21) ni absolutno konvergentna.

61. (1. izpit, 29.1.2015) Dana je vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t+4}\right)^n.$$

(a) Utemeljite, da je za $t = -1$ vrsta konvergentna in izračunajte njeno vsoto.

(b) Za katere vrednosti t je vrsta konvergentna?

Rešitev: Za vsak $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ je podana vrsta geometrijska.

(a) Če je $t = -1$, imamo količnik $q = -\frac{1}{3}$. Ker je $|q| < 1$, je vrsta konvergentna. Po formuli za vsoto geometrijske vrste zdaj dobimo, da je vsota dane vrste enaka

$$\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

(b) Geometrijska vrsta je konvergentna natanko tedaj, ko je njen količnik po absolutni vrednosti manjši od 1. Rešiti moramo torej neenačbo $|q| < 1$ oziroma $\left|\frac{t}{t+4}\right| < 1$. Ta neenačba je ekvivalentna dvojni neenačbi

$$-1 < \frac{t}{t+4} < 1.$$

Rešimo najprej neenačbo $\frac{t}{t+4} < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{t}{t+4} - 1 &< 0, \\ \frac{t-(t+4)}{t+4} &< 0, \\ \frac{-4}{t+4} &< 0. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost velja, ko je imenovalec ulomka na levi strani pozitiven: $t+4>0$. Rešitev neenačbe $\frac{t}{t+4} < 1$ je torej interval $I_1 = (-4, \infty)$.

Rešimo še neenačbo $\frac{t}{t+4} > -1$:

$$\begin{aligned} \frac{t}{t+4} + 1 &> 0, \\ \frac{t+(t+4)}{t+4} &> 0, \\ \frac{2t+4}{t+4} &> 0, \\ \frac{t+2}{t+4} &> 0. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost velja, kadar sta števec in imenovalec bodisi oba pozitivna bodisi oba negativna: $t+2>0$ in $t+4>0$ ali pa $t+2<0$ in $t+4<0$. Torej ali velja $t > -2$ ali $t < -4$. Rešitev neenačbe $\frac{t}{t+4} > -1$ je torej $I_2 = (-\infty, -4) \cup (-2, \infty)$.

Rešitev neenačbe $\left|\frac{t}{t+4}\right| < 1$ je tako presek $I_1 \cap I_2 = (-2, \infty)$. Torej dana vrsta je konvergentna za $t \in (-2, \infty)$.

Opomba: Neenačbo $\left|\frac{t}{t+4}\right| < 1$ bi lahko za $t \neq 1$ prepisali v ekvivalentno enačbo $|t| < |t+4|$.

62. (2. kolokvij, 18.1.2017) Pokažite, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n^2} \tag{22}$$

zadošča pogojem Leibnizovega izreka. Izračunajte njeno tretjo delno vsoto s_3 in ocenite za koliko se s_3 največ razlikuje od prave vsote vrste. Pokažite še, da vrsta ni absolutno konvergentna.

Rešitev: Označimo $a_n = \frac{n+3}{n^2}$. Preveriti moramo dva pogoja: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ in 2) $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak n. Izračunajmo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2} \quad \text{(števec in imenovalec delimo z } n^2\text{)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1} = \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Neenakost $a_{n+1} \leq a_n$ prepišemo v

$$\frac{n+4}{(n+1)^2} \leq \frac{n+3}{n^2}.$$

Levo in desno stran te neenakosti pomnožimo z $n^2(n+1)^2$ in dobimo ekvivalentno neenakost

$$(n+4)n^2 \leq (n+3)(n+1)^2.$$

Dobljena neenakost je ekvivalentna neenakosti

$$n^3 + 4n^2 \leq n^3 + 5n^2 + 7n + 3 \quad \text{ali}$$

$$0 \leq n^2 + 7n + 3.$$

Zadnja neenakost pa očitno velja za vsak $n \geq 1$. Ker je obema pogojema Leibnizovega izreka zadoščeno, je podana vrsta konvergentna.

Izračunajmo s_3:

$$s_3 = (-1)^2\frac{4}{1^2} + (-1)^3\frac{5}{2^2} + (-1)^4\frac{6}{3^2} = 4 - \frac{5}{4} + \frac{6}{9} = \frac{41}{12}.$$

Uporabimo oceno $|s - s_n| < a_{n+1}$ za $n = 3$. Ker je $a_4 = \frac{7}{16}$, dobimo oceno $|s - s_3| < \frac{7}{16}$, torej se s_3 po absolutni vrednosti od dejanske vsote vrste razlikuje za največ $\frac{7}{16}$.

Iz definicije absolutne konvergence sledi, da moramo pokazati, da je vrsta iz absolutnih vrednosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2}.$$

divergentna. Naj bo $b_n = \frac{1}{n}$. Ker je $\frac{n+3}{n} > 1$, imamo $\frac{n+3}{n^2} > \frac{1}{n}$, kar je $a_n > b_n$. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna (harmonična vrsta), iz primerjalnega testa sledi, da je tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna. Torej dana vrsta (22) ni absolutno konvergentna.

63. (3. izpit, 13.6.2017) Dana je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{23}$$

Ali konvergira? Ali konvergira absolutno? Odgovore utemeljite.

Rešitev: Naj bo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Preveriti moramo dva pogoja: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ in 2) $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak n. Izračunajmo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0\,.$$

Neenakost $a_{n+1} \leq a_n$ prepišemo v

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ta neenakost pa očitno velja za vsak $n \geq 1$. Ker je obema pogojema Leibnizovega izreka zadoščeno, je podana vrsta konvergentna.

Iz definicije absolutne konvergence sledi, da moramo preveriti, ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

konvergentna. Naj bo $b_n = \frac{1}{n+1}$. Ker je $\sqrt{n+1} < n+1$ (za vsak $n \in \mathbb{N}$), je $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n+1}$. Zato velja $a_n > b_n$. Ker je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna (harmonična vrsta brez prvega člena), iz primerjalnega testa sledi, da je tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna. Torej dana vrsta (23) ni absolutno konvergentna.

10 Indukcija in/ali zaporedja in vrste

64. (1. kolokvij, 25.11.2013)

(a) Pokažite s popolno indukcijo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{k=1}^{n}(2+3k) = \frac{3n^2+7n}{2}.$$

(b) Izračunajte limito

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(2+3k)}{n^2+2n}$$

in določite, kateri členi ležijo izven ε-okolice limite L s polmerom $\varepsilon = 0.01$.

Rešitev:

(a) Dokazati je treba, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$5+8+11+\ldots+(2+3n) = \frac{3n^2+7n}{2}.$$

Pri $n=1$ se naša trditev glasi $5 = \frac{3+7}{2}$. Torej baza indukcije stoji. Predpostavimo, da za nek $n=k$ ($k \geq 1$) velja

$$5+8+11+\ldots+(2+3k) = \frac{3k^2+7k}{2}.$$

Pokažimo sedaj, da za $n=k+1$ velja

$$5+8+11+\ldots+(2+3k)+(5+3k) = \frac{3(k+1)^2+7(k+1)}{2}. \tag{24}$$

Vidimo, da za desno stran enakosti (24) velja

$$\frac{3(k+1)^2+7(k+1)}{2} = \frac{3k^2+13k+10}{2}.$$

Na prvih k členih leve strani enakosti (24) uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned}
5+8+11+\ldots+(2+3k)+(5+3k) &= \frac{3k^2+7k}{2}+5+3k \\
&= \frac{3k^2+7k+10+6k}{2} \\
&= \frac{3k^2+13k+10}{2}.
\end{aligned}$$

Torej trditev drži tudi za $n = k+1$. Zato trditev drži za vsa naravna števila n.

(b) Iskano limito izračunamo s pomočjo rezultata iz naloge (a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(2+3k)}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+7n}{2}}{n^2+2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7n}{n^2+2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Izven ε-okolice limite zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2+3k)}{n^2+2n} = \frac{3n^2+7n}{2(n^2+2n)}$$

ležijo tisti členi a_n, za katere velja

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| \geq \varepsilon.$$

V zgornjo neenačbo vstavimo splošni člen in upoštevamo dejstvo, da je $n > 0$ in zato $\left|\frac{n}{2(n^2+2n)}\right| = \frac{n}{2(n^2+2n)}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3n^2+7n}{2(n^2+2n)} - \frac{3}{2}\right| &\geq 0.01, \\
\left|\frac{3n^2+7n-3(n^2+2n)}{2(n^2+2n)}\right| &\geq \frac{1}{100}, \\
\frac{n}{2(n^2+2n)} &\geq \frac{1}{100}, \\
100 &\geq \frac{2(n^2+2n)}{n}, \\
100 &\geq 2n+4, \\
48 &\geq n.
\end{aligned}$$

Zunaj dane ε-okolice leži prvih 48 členov zaporedja.

65. (2. izpit, 12.2.2015) Naj bo $a_n = \frac{3+2n}{n^2}$, $n \geq 1$.

(a) Določite limito zaporedja $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Kateri členi ležijo izven okolice $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ limite a, če je $\varepsilon = 0.25$?

(b) S primerjalnim kriterijem pokažite, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ni konvergentna.

Rešitev:

(a) Izračunajmo limito:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2n}{n^2} = 0.$$

Izven ε-okolice ležijo tisti členi a_n, za katere je

$$|a_n - 0| \geq 0.25$$

V zgornjo neenačbo vstavimo splošni člen danega zaporedja in upoštevamo dejstvo, da je $\frac{3+2n}{n^2} > 0$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{3+2n}{n^2}\right| &\geq 0.25, \\ \frac{3+2n}{n^2} &\geq \frac{1}{4}, \\ 12+8n &\geq n^2, \\ 0 &\geq n^2 - 8n - 12. \end{aligned}$$

Ker sta rešitvi kvadratne enačbe $x^2 - 8x - 12 = 0$ števili

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4\cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{5},$$

neenačbo $x^2 - 8x - 12 \leq 0$ rešijo vsa realna števila iz intervala $[4-2\sqrt{5}, 4+2\sqrt{5}]$. Neenačbo $0 \geq n^2 - 8n - 12$ rešijo vsa naravna števila iz istega intervala, torej vsa naravna števila manjša ali enaka 8 (saj je $2\sqrt{5} = \sqrt{20} \in (4,5)$). To nam pove, da zunaj dane ε-okolice leži prvih 8 členov danega zaporedja.

(b) Zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{3+2n}{n^2}$ primerjamo s harmoničnim zaporedjem, t.j. z zaporedjem s splošnim členom $b_n = \frac{1}{n}$. Za vsako naravno število n namreč velja:

$$a_n = \frac{3+2n}{n^2} = \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} > \frac{2}{n} > \frac{1}{n} = b_n.$$

Ker harmonična vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, divergira tudi dana vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

66. (4. izpit, 31.8.2015) Za zaporedje

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}, \ n \in \mathbb{N},$$

z uporabo matematične indukcije preverite, da velja formula

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}$$

in določite še limito zaporedja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rešitev: Dokazati je treba, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}.$$

Pri $n = 1$ se naša trditev glasi $\frac{1}{3} = \frac{3^2-2-3}{4\cdot 3}$. Ker je trditev pravilna, baza indukcije stoji.
Predpostavimo, da za nek $n = k$ $(k \geq 1)$ velja

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k}{3^k} = \frac{3^{k+1} - 2k - 3}{4 \cdot 3^k}.$$

Pokažimo zdaj, da za $n = k + 1$ velja

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3^{k+2} - 2(k+1) - 3}{4 \cdot 3^{k+1}}. \tag{25}$$

Vidimo, da za desno stran enakosti (25) velja

$$\frac{3^{k+2} - 2(k+1) - 3}{4 \cdot 3^{k+1}} = \frac{3^{k+2} - 2k - 5}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Na prvih k členih leve strani enakosti (25) bomo uporabili indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} &= \frac{3^{k+1} - 2k - 3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{3(3^{k+1} - 2k - 3) + 4(k+1)}{4 \cdot 3^k \cdot 3} \\
&= \frac{3^{k+2} - 2k - 5}{4 \cdot 3^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Torej trditev drži tudi za $n = k + 1$. Zato trditev drži za vsa naravna števila n.
Iskano limito izračunamo s pomočjo zgornjega rezultata:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2n}{3^n} - \frac{3}{3^n}}{4} = \frac{3}{4}.$$

Opomba: Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$, je vsota vrste $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4}$.

11 Zveznost in limita funkcije

67. (2. kolokvij, 13.1.2014) Določite parametra a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ \frac{b\sin x^2}{1+2x-e^{2x}}, & x > 0 \end{cases}$$

povsod zvezna.

Rešitev: Funkciji

$$\frac{2}{1-e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{in} \quad \frac{b\sin x^2}{1+2x-e^{2x}}$$

sta zvezni za $x > 0$ oz. $x < 0$. Z izbiro parametrov a in b moramo zagotoviti še zveznost v točki 0. Funkcija bo zvezna, če bo v točki 0

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = f(0) = \lim_{x\searrow 0} f(x).$$

Izračunajmo najprej levo limito:

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{2}{1-e^{\frac{1}{x}}} = 2, \text{ saj je } \lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Izračunajmo še desno limito:

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{b\sin x^2}{1+2x-e^{2x}} = b\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x^2}{1+2x-e^{2x}}.$$

Ko $x \searrow 0$, gresta števec in imenovalec zadnjega ulomka proti 0. Dobili smo nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$, ki jo poskusimo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$b\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x^2}{1+2x-e^{2x}} \overset{l'H}{=} b\lim_{x\searrow 0} \frac{2x\cos x^2}{2-2e^{2x}}.$$

Še enkrat smo dobili nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$, ki jo poskusimo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$b\lim_{x\searrow 0} \frac{2x\cos x^2}{2-2e^{2x}} \overset{l'H}{=} b\lim_{x\searrow 0} \frac{2\cos x^2 - 4x\sin x^2}{-4e^{2x}} = -\frac{b}{2}.$$

Torej je $\lim_{x\searrow 0} f(x) = -\frac{b}{2}$. Iz vrednosti limit sledi, da bo funkcija povsod zvezna, če bo

$$2 = a = -\frac{b}{2},$$

torej za $a = 2$ in $b = -4$.

68. (4. izpit, 1.9.2014) Določite parameter a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos 4x}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

zvezna.

Rešitev: Za $x \neq 0$ predpis določa zvezno funkcijo. Z izbiro parametra a moramo zagotoviti še zveznost v točki 0. Funkcija bo torej zvezna, če bo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a.$$

Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos 4x}{x^2}.$$

Ko gre $x \to 0$, gresta števec in imenovalec ulomka proti 0. Dobimo nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$, ki jo poskusimo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos 4x}{x^2} &\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + 4\sin 4x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(e^{x^2} + \frac{2\sin 4x}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} e^{x^2} + 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 1 + 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}.\end{aligned}$$

V limiti imamo še enkrat nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$, ki jo poskusimo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{1} = 4.$$

Ker limita obstaja, nam l'Hospitalov izrek zagotavlja, da je $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + 2\cdot 4 = 9$. Torej bo funkcija povsod zvezna, če bo $a = 9$.

Opomba: Pri računanju limite bi lahko najprej uporabili l'Hospitalov izrek, potem pa upoštevali, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4.$$

69. (2. kolokvij, 18.1.2016) Izračunajte limiti

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$.

Rešitev:

(a) Ker imamo nedoločenost oblike $\infty \cdot 0$, limito prepišemo v

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

in dobimo nedoločenost oblike $\frac{\infty}{\infty}$. Poskusimo jo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Ker zadnja limita obstaja, nam l'Hospitalov izrek zagotavlja, da je $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$.

(b) Ker imamo nedoločenost oblike $\infty \cdot 0$, limito prepišemo v

$$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

in dobimo nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$. Poskusimo jo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x}} = 2, \text{ saj je } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

L'Hospitalov izrek nam zagotavlja, da je $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right) = 2$.

Opomba: Limito $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$ lahko izračunamo tudi hitreje s pomočjo nove spremenljivke $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\searrow 0} \frac{e^{2t}-1}{t} \overset{l'H}{=} \frac{2e^{2t}}{1} = 2.$$

70. (3. izpit, 13.6.2016) Določite parametra a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}, & -1 < x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1 \\ \arctan \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

zvezna povsod na svojem definicijskem območju.

Rešitev: Za $-1 < x < 0$ predpis $\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$ določa zvezno funkcijo. Za $0 \leq x \leq 1$ predpis $ax + b$ tudi določa zvezno funkcijo. Za $x > 1$ je predpis enak $\arctan \frac{1}{x-1}$, ki je prav tako zvezna funkcija. Z izbiro parametrov a in b moramo zagotoviti še zveznost v točki 0 in točki 1. Funkcija $f(x)$ bo torej zvezna, če bo

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = f(0) = b \qquad \text{in} \qquad \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = a + b.$$

Levo limito v točki 0 bomo izračunali na dva načina.

1. način

Ko $x \nearrow 0$, gresta števec in imenovalec ulomka proti 0. Imamo nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$, ki jo poskusimo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \nearrow 0} \frac{2 \cos 2x}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = 4 \lim_{x \nearrow 0} \left(\sqrt{x+1} \cos 2x \right) = 4.$$

Ker zadnja limita obstaja, nam l'Hospitalov izrek zagotavlja, da je $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 4$.

2. način

Izraz racionaliziramo in uporabimo dejstvi, da je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2$ in $\lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1} + 1) = 2$:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}+1) \sin 2x}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)} = 2 \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 4.$$

Desna limita v točki 1 je enaka

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} \arctan \frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{2}, \text{ saj je } \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

Iz vrednosti limit sledi, da bo funkcija zvezna povsod na svojem definicijskem območju, če bo $b = 4$ in $a + b = \frac{\pi}{2}$, torej $a = \frac{\pi}{2} - 4$.

71. (2. kolokvij, 18.1.2017) Določite parametra a in b tako, da bo funkcija $f(x)$ povsod zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{x+1}, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+2x}-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Rešitev: Za $x \neq -1$ in $x \neq 0$ je funkcija zvezna. Z izbiro parametrov a in b moramo zagotoviti še zveznost v točkah -1 in 0. Funkcija bo torej zvezna povsod, če bo

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = f(-1) = -a + b \qquad \text{in} \qquad \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0) = b.$$

Leva limita funkcije $f(x)$ v točki -1 je enaka

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \nearrow -1} \arctan \frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{2}, \text{ saj je } \lim_{x \nearrow -1} \frac{x}{x+1} = \infty.$$

Desno limito funkcije $f(x)$ v točki 0 bomo izračunali na dva načina.

1. način. Ko $x \searrow 0$, gresta števec in imenovalec ulomka proti 0. Imamo nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$, ki jo poskusimo odpraviti s pomočjo l'Hospitalovega pravila:

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+2x}-x} \overset{l'H}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} - 1} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1-\sqrt{x^2+2x}} = 0,$$

ker je $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$. L'Hospitalov izrek nam zagotavlja, da je $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$.

2. način. Izraz racionaliziramo in uporabimo dejstvo, da je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} f(x) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{x^2+2x-x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = 0. \end{aligned}$$

Iz vrednosti limit sledi, da bo funkcija povsod zvezna, če bo $b = 0$ in $-a + b = \frac{\pi}{2}$, torej $a = -\frac{\pi}{2}$.

12 Odvod

72. (2. kolokvij, 13.1.2014) Skicirajte graf funkcije $f\colon [0,1] \to [1,2]$, za katero velja naslednje:

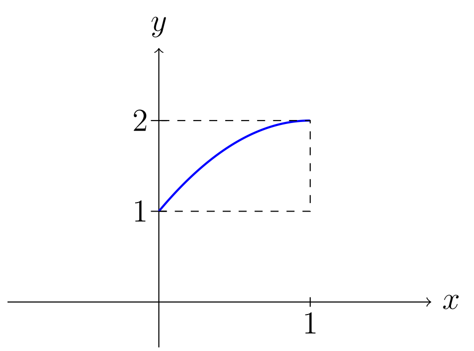
    (1) funkcija f je bijekcija;

    (2) $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in [0,1]$;

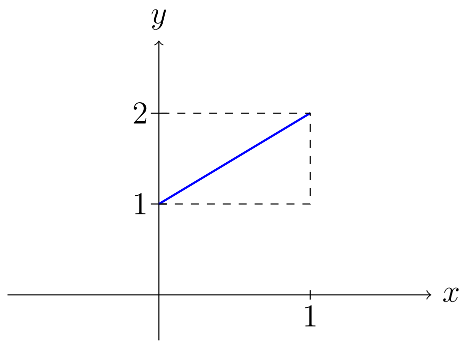
    (3) $f''(x) \leq 0$ za vse $x \in [0,1]$.

    Poiščite funkcijski predpis kake funkcije s temi lastnostmi.

Rešitev: Bijektivnost funkcije f pomeni, da vsaka vodoravna premica $y = a$, kjer je $a \in [1,2]$, seka graf funkcije f natanko v eni točki. Pogoj $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in [0,1]$ pomeni, da je za vsak $x \in (0,1)$ funkcija f v točki x naraščajoča (v primeru, če je $f'(x) > 0$) ali pa ima f v točki x stacionarno točko, ki ni lokalni ekstrem (v primeru, če je $f'(x) = 0$). Pogoj $f''(x) \leq 0$ za vse $x \in [0,1]$ pa pomeni, da je za vsak $x \in (0,1)$ funkcija f v točki x konkavna (v primeru, če je $f''(x) < 0$) ali pa je točka x kandidat za prevoj, ki ni prevoj (v primeru, če je $f''(x) = 0$). Graf funkcije, ki ima vse navedene lastnosti, je skiciran spodaj:



Če želimo poiskati konkretni predpis funkcije s temi lastnostmi, je najlažje, da vzamemo premico, ki poteka skozi točki $(0,1)$ in $(1,2)$: enačba te premice je $y = x+1$. Dana premica očitno bijektivno preslika interval $[0,1]$ v interval $[1,2]$, funkcija $f(x) = x+1$ je naraščajoča na $(0,1)$, kar je razvidno iz grafa ali pa iz prvega odvoda $f'(x) = 1 > 0$. Drugi odvod je $f''(x) = 0$, torej velja tudi $f''(x) \leq 0$ na $[0,1]$. To, da je $f''(x) = 0$, nam namreč pove, da funkcija ni niti konveksna niti konkavna in da je vsak $x \in (0,1)$ kandidat za prevoj, ki dejansko ni prevoj.



Opomba: Seveda $f(x) = x + 1$ ni edina funkcija, ki zadošča pogojem naloge. Drug predpis funkcije, ki zadošča pogojem naloge, je na primer $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in [0, 1]$. Graf te funkcije je lok parabole.

73. (2. kolokvij, 13.1.2014) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}.$$

Določite definicijsko območje, ničle, začetno vrednost, intervale monotonosti, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti, prevoje dane funkcije. Raziščite obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja in funkcijo narišite.

Rešitev:

- Definicijsko območje: Ker je funkcija $\arctan x$ definirana za vse realne x, je funkcija $\arctan \frac{x-1}{x+1}$ definirana povsod, kjer je definirana funkcija $\frac{x-1}{x+1}$. Naravno definicijsko območje zadnje funkcije so očitno vsa realna števila razen $x = -1$. Torej $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ker je $\arctan \frac{x-1}{x+1} = 0$ natanko takrat, ko je $\frac{x-1}{x+1} = 0$, je edina ničla dane funkcije $x = 1$.
- Začetna vrednost je $f(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Najprej določimo obnašanje funkcije, ko $x \to \infty$ in $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \arctan \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \arctan \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \arctan\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Torej je premica $y = \frac{\pi}{4}$ vodoravna asimptota dane funkcije tako za $x \to \infty$ kot za $x \to -\infty$. Ker funkcija ni definirana v točki $x = -1$, imamo še dve krajišči definicijskega območja: ko se x približuje vrednosti -1 z leve ali z desne.

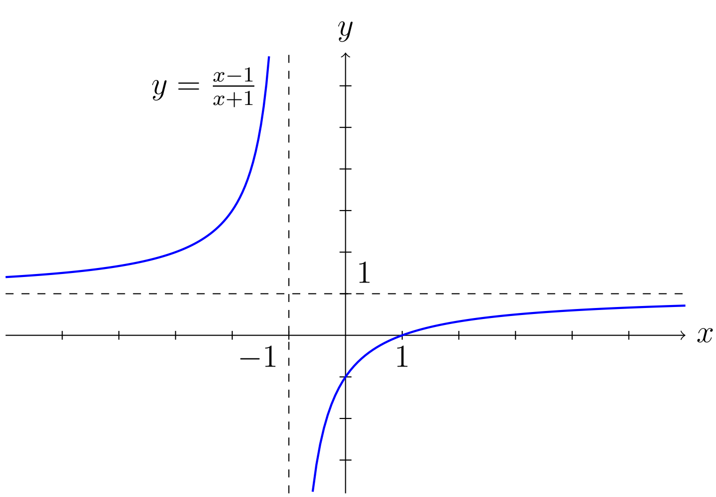
Poglejmo si najprej primer, ko $x \nearrow -1$. To pomeni, da $x - 1 \nearrow -2$, torej $x-1 < 0$, in $x+1 \nearrow 0$, torej $x+1 < 0$. Potem je $\frac{x-1}{x+1} > 0$. Ker gre imenovalec $x + 1$ proti 0 in je števec omejen, je $\lim\limits_{x\nearrow-1} \frac{x-1}{x+1} = \infty$. Potem je

$$\lim_{x\nearrow-1} \arctan\frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Poglejmo si sedaj še primer, ko $x \searrow -1$. Tako kot prej vidimo, da $x-1 \searrow -2$, torej $x - 1 < 0$, in $x + 1 \searrow 0$, torej $x + 1 > 0$. (V tem se ta limita razlikuje od prejšnje!) Potem je $\frac{x-1}{x+1} < 0$. Ker gre imenovalec $x + 1$ proti 0 in je števec omejen, je $\lim\limits_{x\searrow-1} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$. Potem je

$$\lim_{x\searrow-1} \arctan\frac{x-1}{x+1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Opomba: Pri vseh štirih limitah bi si lahko pomagali tudi s skico grafa funkcije $y = \frac{x-1}{x+1}$:



Iz skice odčitamo, da velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1, \qquad \lim_{x\nearrow-1} \frac{x-1}{x+1} = \infty, \qquad \lim_{x\searrow-1} \frac{x-1}{x+1} = -\infty.$$

- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunamo odvod in poiščemo stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}=\frac{2}{2x^2+2}=\frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

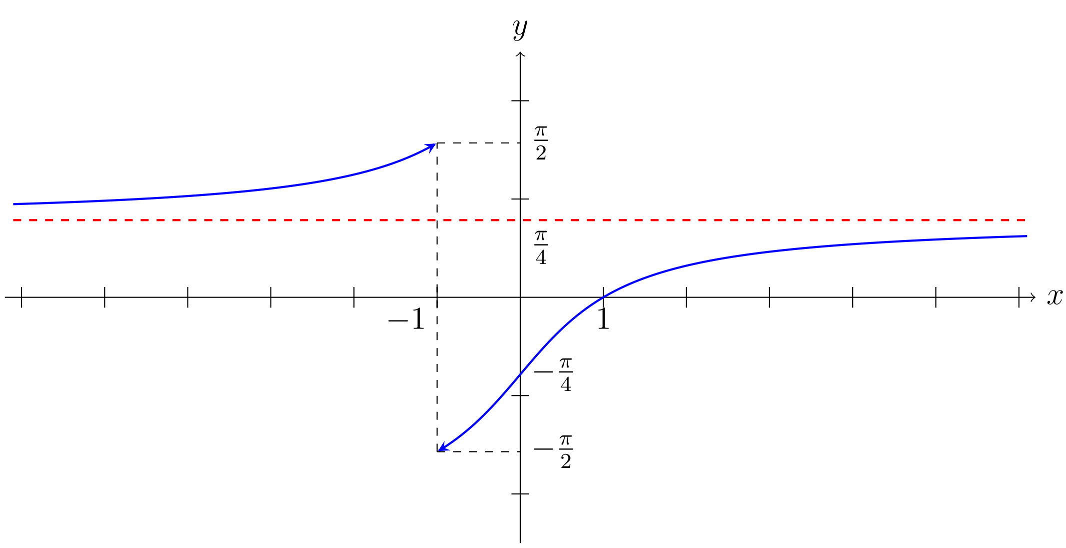
  Stacionarne točke so torej rešitve enačbe $\frac{1}{x^2+1}=0$. Ker ta enačba nima nobene rešitve, dana funkcija nima stacionarnih točk in zato tudi nima (lokalnih) ekstremov. Ker je $f'(x)>0$ za vse $x\in D_f$, funkcija f narašča povsod na svojem definicijskem območju.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunamo drugi odvod in poiščemo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

  Torej $f''(x)=0$ velja, kadar je $x=0$. Če je $x>0$, je $f''(x)<0$ in zato je funkcija na intervalu $(0,\infty)$ konkavna. Če je $x<0$, je $f''(x)>0$ in zato je funkcija na območju $(-\infty,0)\setminus\{-1\}$ konveksna. Točka $x=0$ je zato edini prevoj dane funkcije.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



Opomba (za zahtevnejše bralce): Graf dane funkcije se da narisati tudi na drugi način: ko smo ugotovili, da je $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, lahko opazimo, da ima dana funkcija isti odvod kot funkcija $\arctan x$. Znano je, da če imata dve funkciji isti odvod, potem se na vsakem intervalu zveznosti obeh funkcij razlikujeta največ za konstanto. Torej na vsakem od dveh intervalov definicijskega območja funkcije f velja

$$f(x) - \arctan x = A$$

za neko število A, ki ni nujno enako na obeh intervalih. Poiščimo to število:

$$\tan\left(\arctan\frac{x-1}{x+1} - \arctan x\right) = \tan A.$$

Z uporabo formule

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

ter enakosti $\tan(\arctan a) = a$ preoblikujemo levo stran izraza zgoraj:

$$\tan\left(\arctan\frac{x-1}{x+1} - \arctan x\right) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - x}{1 + \frac{x-1}{x+1}\cdot x} = \frac{x-1-x(x+1)}{x+1+(x-1)x} = -1.$$

Torej je $\tan A = -1$ in zato je $A = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, iz česar sledi, da je

$$f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Če vstavimo v to enakost $x = 0$, dobimo

$$-\pi/4 = f(0) = \arctan 0 - \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

iz česar sledi, da je $k = 0$. Torej za $x > -1$ je $f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$. Če v enakost $f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4} + \pi k$ vstavimo na primer $x = -2$, dobimo $k = 1$. Torej za $x < -1$ je $f(x) = \arctan x + \frac{3\pi}{4}$. Zato lahko graf dane funkcije narišemo tako, da premaknemo levi del (kadar je $x < -1$) grafa funkcije $\arctan x$ za $\frac{3\pi}{4}$ enot navzgor in desni del (kadar je $x > -1$) grafa funkcije $\arctan x$ za $\frac{\pi}{4}$ enot navzdol.

74. (2. kolokvij, 19.1.2015) Določite konstanti α in β tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi \\ \alpha x + \beta, & x > \pi \end{cases}$$

v točki $x = \pi$ odvedljiva.

Rešitev: Če je funkcija odvedljiva v točki, je v tej točki zvezna. Dana funkcija bo zvezna v točki π, če bo veljala enakost

$$\lim_{x \nearrow \pi} f(x) = \lim_{x \searrow \pi} f(x) = f(\pi).$$

Ker je $\lim\limits_{x \nearrow \pi} f(x) = f(\pi) = \sin \pi = 0$, mora veljati še

$$\lim_{x \searrow \pi} f(x) = \alpha\pi + \beta = 0. \tag{26}$$

Poleg zveznosti sta za odvedljivost funkcije v dani točki potrebna še obstoj in ujemanje levega in desnega odvod funkcije v tej točki. Levi odvod je enak

$$(\sin x)'|_{x=\pi} = \cos x|_{x=\pi} = \cos \pi = -1.$$

Desni odvod pa je enak

$$(\alpha x + \beta)'|_{x=\pi} = \alpha|_{x=\pi} = \alpha.$$

Torej $\alpha = -1$. Če vstavimo dobljeno vrednost α v pogoj (26), dobimo $\beta = \pi$. Torej, dana funkcija je odvedljiva v točki π, kadar velja $\alpha = -1$ in $\beta = \pi$.

75. (2. kolokvij, 19.1.2015) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = e^{\frac{2-x}{x}}.$$

Določite definicijsko območje, ničle, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja in funkcijo narišite.

Rešitev:

- Definicijsko območje: Ker je funkcija e^x definirana za vse realne x, je funkcija $e^{\frac{2-x}{x}}$ definirana povsod, kjer je definirana funkcija $\frac{2-x}{x}$. Naravno definicijsko območje zadnje funkcije so očitno vsa realna števila razen števila $x = 0$. Torej $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ker je $e^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, dana funkcija nima nobene ničle.

- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Najprej določimo obnašanje funkcije, ko $x \to \infty$ in $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2-x}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\frac{2}{x}-1}{1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2-x}{x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{\frac{2}{x}-1}{1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Torej je premica $y = \frac{1}{e}$ vodoravna asimptota dane funkcije tako za $x \to \infty$ kot za $x \to -\infty$. Ker funkcija ni definirana v točki $x = 0$, imamo še dve krajišči definicijskega območja: ko se x približuje vrednosti 0 z leve ali z desne.

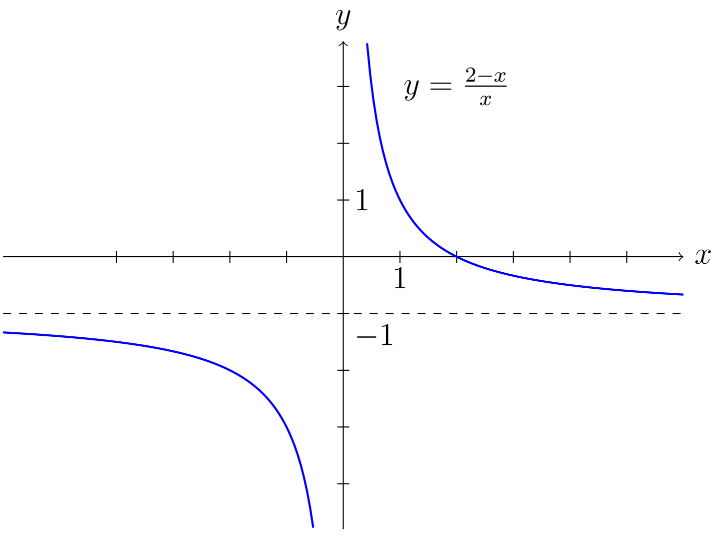
Poglejmo si najprej primer, ko $x \nearrow 0$. To pomeni, da $-x \searrow 0$ in zato $2-x \searrow 2$. Torej gre števec ulomka $\frac{2-x}{x}$ proti 2. Ker gre imenovalec x proti 0 z leve, je $\lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{2-x}{x} = -\infty$. Z upoštevanjem dejstva, da je $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, vidimo, da je

$$\lim_{x\nearrow 0} e^{\frac{2-x}{x}} = 0.$$

Poglejmo si sedaj še primer, ko $x \searrow 0$. Podobno kot prej vidimo, da je $-x \nearrow 0$ in zato je $2 - x \nearrow 2$. Torej gre števec ulomka $\frac{2-x}{x}$ proti 2. Ker gre imenovalec x proti 0 z desne, je $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{2-x}{x} = \infty$. Z upoštevanjem dejstva, da je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x} = \infty$, vidimo, da je

$$\lim_{x\searrow 0} e^{\frac{2-x}{x}} = \infty.$$

Opomba: Pri vseh štirih limitah bi si lahko pomagali tudi s skico grafa racionalne funkcije $y = \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x} - 1$:



Iz skice odčitamo, da velja

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x}=-1,\quad \lim_{x\nearrow 0}\frac{2-x}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\searrow 0}\frac{2-x}{x}=\infty.$$

- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunamo odvod in poiščemo stacionarne točke:

$$f'(x)=e^{\frac{2-x}{x}}\cdot\frac{-x-(2-x)}{x^2}=\frac{-2e^{\frac{2-x}{x}}}{x^2}.$$

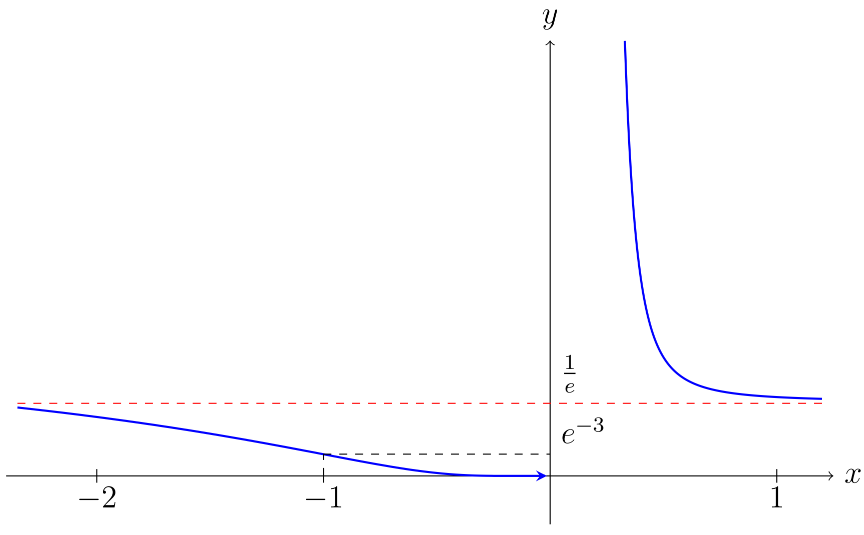
Ker je $e^{\frac{2-x}{x}}>0$ in $x^2>0$ za vsak $x\in D_f$, je $f'(x)<0$ za vse $x\in D_f$. Torej funkcija f pada povsod na svojem definicijskem območju. Funkcija nima stacionarnih točk in zato tudi nima (lokalnih) ekstremov.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunamo drugi odvod in poiščemo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(e^{\frac{2-x}{x}}x^{-2})' \\ &= -2(-2e^{\frac{2-x}{x}}\cdot x^{-2}x^{-2}+e^{\frac{2-x}{x}}(-2)x^{-3}) \\ &= 4e^{\frac{2-x}{x}}(x^{-4}+x^{-3}) \\ &= \frac{4e^{\frac{2-x}{x}}(1+x)}{x^4}. \end{aligned}$$

Ker je $e^{\frac{2-x}{x}}>0$ in $\frac{1}{x^4}>0$ za vsak $x\in D_f$, je predznak $f''(x)$ enak predznaku izraza $(x+1)$. Če je $x<-1$, je torej $f''(x)<0$ in zato je funkcija f na intervalu $(-\infty,-1)$ konkavna. Če je $x>-1$, je torej $f''(x)>0$ in zato je funkcija f na območju $(-1,0)\cup(0,\infty)$ konveksna. Edina rešitev enačbe $f''(x)=0$ je $x=-1$, ki je edini prevoj dane funkcije. Vrednost funkcije v prevojni točki je $f(-1)=e^{-3}$.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



76. (3. izpit, 15.6.2015) Z uporabo l'Hospitalovega pravila izračunajte limito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

Rešitev: Limito bomo izračunali na dva načina.

1. način
Najprej dani izraz malo preuredimo: uporabimo enakost $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in nato dobljeni ulomek okrajšamo s $\sin x$ ter pomnožimo števec in imenovalec s $\cos x$:

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x}.$$

Ko gre x proti 0, gresta števec in imenovalec izraza $\frac{1-\cos x}{\sin^2 x \cos x}$ proti 0, zato lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x}.$$

Ko dobjeni izraz pokrajšamo s $\sin x$, dobimo, da je dana limita enaka

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{2},$$

saj je $\lim\limits_{x\to 0}(2\cos^2 x - \sin^2 x) = 2$.

2. način

Ko x gre proti 0, gresta števec in imenovalec izraza $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ proti 0, zato lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3\sin^2 x \cos x}.$$

Ko pomnožimo števec in imenovalec zadnjega ulomka s $\cos^2 x$, dobimo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x \cos^3 x}.$$

Ker je $\lim\limits_{x\to 0} \cos^3 x = 1$, je zadnja limita, če le obstaja, enaka

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x}.$$

Ko gre x proti 0, gresta števec in imenovalec zadnjega ulomka proti 0, zato lahko spet uporabimo l'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}{6\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Opomba: Lahko pa izračun limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x \cos^3 x}$ nadaljujemo tudi drugače.

Ko x gre proti 0, gresta števec in imenovalec izraza $\frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x \cos^3 x}$ proti 0, zato lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{3(2\sin x \cos^4 x - 3\sin^3 x \cos^2 x)}.$$

Okrajšamo zadnji ulomek s $3\sin x \cos^2 x$ in dobimo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{3(2\sin x \cos^4 x - 3\sin^3 x \cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos^2 x - 3\sin^2 x}.$$

Ko gre x proti 0, gre imenovalec zadnjega ulomka proti $2\cos^2 0 - 3\sin^2 0 = 2$, zato gre ulomek proti limiti $\frac{1}{2}$.

77. (2. kolokvij, 18.1.2016) Določite Taylorjev polinom $T_2(x;0)$ za funkcijo $f(x) = \arctan x$ glede na točko 0. Ocenite napako približka $f(x) \approx T_2(x;0)$, ki bo veljavna za $|x| \le \frac{1}{10}$.

Rešitev: Uporabimo formulo

$$T_2(x;0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_2(x;0),$$

kjer je $R_2(x;0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$ za nek ξ med 0 in x.
Odvajamo:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \; f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)(-2-2x^2+8x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Ker je $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ in $f''(0) = 0$, velja

$$T_2(x;0) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + R_2(x;0) = x + R_2(x;0).$$

Napaka približka je enaka

$$R_2(x;0) = \frac{-2+6\xi^2}{6(1+\xi^2)^3}x^3 = \frac{-1+3\xi^2}{3(1+\xi^2)^3}x^3$$

za nek ξ med 0 in x.

Ocenimo napako približka, če je $|x| \leq 0.1$. Ker je $\xi^2 > 0$, je $3(1+\xi^2)^3 > 3$ in $|-1+3\xi^2| < 1 - 3\xi^2 < 1$. Z upoštevanjem tega in $|x| \leq 0.1$ ocenimo

$$|R_2(x;0)| = \left| \frac{-1+3\xi^2}{3(1+\xi^2)^3}x^3 \right| = \frac{|-1+3\xi^2|}{3(1+\xi^2)^3}|x|^3 < \frac{1}{3} \cdot 0.1^3,$$

kar je približno enako 0.00033.

78. (2. izpit, 11.2.2016) Poiščite enačbo tangente na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x+3}{3x+5}$$

v točki $x_0 = -1$. V kateri točki ta tangenta seka abscisno os? Ali še kakšna tangenta grafa funkcije g seka x-os v isti točki?

Rešitev: Naj bo $y = kx + n$ enačba tangente v točki $(-1, 1)$. Potem je $k = g'(-1)$. Ker je

$$g'(x) = \frac{(3x+5) - 3(x+3)}{(3x+5)^2} = \frac{-4}{(3x+5)^2}, \text{ je } k = g'(-1) = \frac{-4}{4} = -1.$$

Torej ima tangenta enačbo $y = -x + n$. Ker gre tangenta skozi točko $(-1, 1)$, velja $1 = -(-1) + n$, iz česar sledi, da je $n = 0$. Torej je enačba tangente v točki $(-1, 1)$ enaka $y = -x$. Tangenta poteka skozi izhodišče in to je ravno presečišče z abscisno osjo.

Naj bo $y = sx + t$ druga tangenta grafa funkcije $g(x)$, ki poteka skozi točko $(0, 0)$. Potem je $t = 0$ in enačba tangente je $y = sx$. Določiti moramo s. Naj bo $y = sx$ tangenta na graf dane funkcije v točki $(a, g(a))$. Potem veljata dva pogoja: $s = g'(a)$ in $g(a) = sa$. Če upoštevamo definicijo $g(x)$ in izračunan izraz za $g'(x)$, dobimo:

$$s = \frac{-4}{(3a+5)^2} \quad \text{in} \quad \frac{a+3}{3a+5} = sa.$$

Izraz za s iz prvega pogoja vstavimo v drugi pogoj in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{a+3}{3a+5} &= \frac{-4a}{(3a+5)^2}, \\ a+3 &= \frac{-4a}{(3a+5)}, \\ (a+3)(3a+5) &= -4a, \\ 3a^2 + 18a + 15 &= 0. \end{aligned}$$

Dobljena enačba ima dve rešitvi $a_1 = -1$ in $a_2 = -5$. Tangento v točki z absciso -1 smo že poiskali – to je premica $y = -x$. Druga rešitev je $a = -5$ in zato je $s = \frac{-4}{(-15+5)^2} = -\frac{1}{25}$. Ugotovili smo, da ima tangenta na graf dane funkcije v točki $(-5, g(-5))$ enačbo $y = -\frac{1}{25}x$, torej gre skozi točko $(0, 0)$, kot smo si želeli. Ker enačba $3a^2 + 18a + 15 = 0$ nima drugih rešitev, razen $a_1 = -1$ in $a_2 = -5$, nobena druga tangenta na graf dane funkcije ne gre skozi koordinatno izhodišče.

79. (2. izpit, 6.2.2017) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

Rešitev:

- Definicijsko območje: Ker je imenovalec vedno različen od 0, je $D_f = \mathbb{R}$.

- Ničle: Enačba $f(x) = 0$ ima samo eno rešitev $x = 0$, ki je edina ničla dane funkcije.
- Sodost/lihost: Ker je

$$f(-x) = \frac{-x}{((-x)^2+1)^2} = -\frac{x}{(x^2+1)^2} = -f(x),$$

je dana funkcija liha, kar pomeni, da je njen graf simetričen glede na koordinatno izhodišče.

- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+2x+\frac{1}{x}} = 0.$$

Ker je funkcija liha, je tudi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

- Intervali monotonosti in ekstremi: Ker so stacionarne točke rešitve enačbe $f'(x) = 0$, izračunamo prvi odvod:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^2 - x \cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}.$$

Vidimo, da ima dana funkcija f dve stacionarni točki, ki sta rešitvi enačbe $1-3x^2 = 0$. To sta točki $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ in $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ko je $x \in (x_1, x_2)$ je $f'(x) > 0$ in zato je funkcija na tem intervalu naraščajoča. Ko je $x < x_1$ ali $x > x_2$, je $f'(x) < 0$ in zato je funkcija na tem območju padajoča. Vidimo, da je točka $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ lokalni minimum in točka $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ lokalni maksimum. Vrednosti funkcije v teh točkah sta $f(x_1) = -\frac{9}{16\sqrt{3}}$ in $f(x_2) = \frac{9}{16\sqrt{3}}$.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Za določanje prevojev in intervalov konveksnosti in konkavnosti uporabimo drugi odvod:

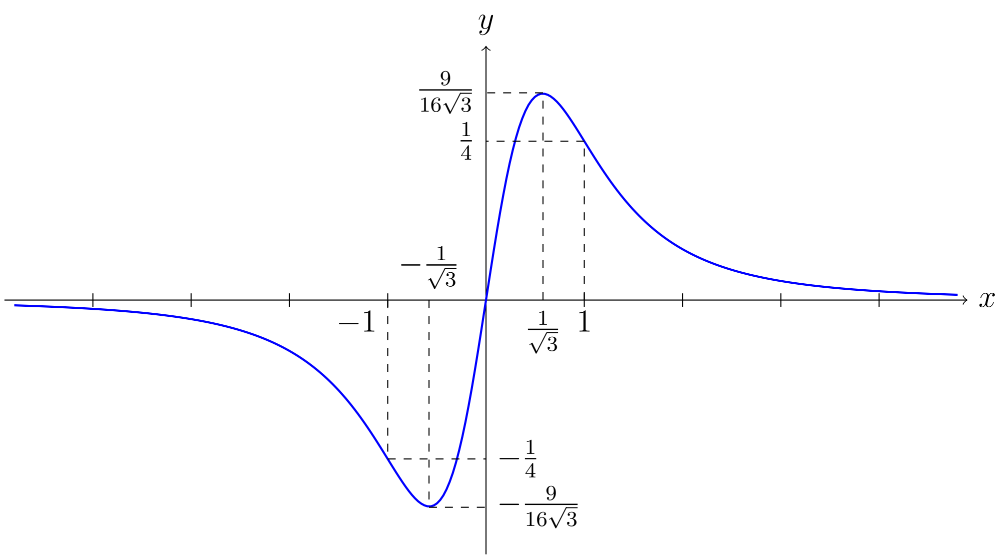
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}\right)' = \frac{-6x(x^2+1)^3 - (1-3x^2)\cdot 3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6} \\ &= \frac{(x^2+1)^2(-6x^3-6x-(1-3x^2)6x)}{(x^2+1)^6} \\ &= \frac{-6x^3-6x-6x+18x^3}{(x^2+1)^4} = \frac{12(x^3-x)}{(x^2+1)^4}. \end{aligned}$$

Ker je $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, so $x_1 = -1, x_2 = 0$ in $x_3 = 1$ kandidati za prevoje. Ogledamo si intervale, na katerih ima $f''(x)$ isti predznak.

- Za $x \in (-\infty, -1)$ je $f''(x) < 0$ in zato je f na tem intervalu konkavna.
- Za $x \in (-1, 0)$ je $f''(x) > 0$ in zato je f na tem intervalu konveksna.
- Za $x \in (0, 1)$ je $f''(x) < 0$ in zato je f na tem intervalu konkavna.
- Za $x \in (1, \infty)$ je $f''(x) > 0$ in zato je f na tem intervalu konveksna.

Tore ima funkcija f v točkah $x_1 = -1, x_2 = 0$ in $x_3 = 1$ prevoje. Vrednosti funkcije v teh točkah so $f(-1) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ in $f(1) = \frac{1}{4}$.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



Opomba: Ker je funkcija f liha, bi lahko računali stacionarne točke, intervale monotonosti, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti le za $x \geq 0$ ter skicirali graf funkcije f za $x \geq 0$. Zaradi lihosti funkcije f, je del grafa funkcije f za $x < 0$ določen z delom grafa funkcije f za $x > 0$ (ta del grafa moramo prezrcaliti preko koordinatnega izhodišča). Iz celotnega grafa bi dobili podatke o ekstremih, intervalih naraščanja in padanja, prevojih ter intervalih konveksnosti in konkavnosti funkcije f tudi za $x < 0$.

80. (3. izpit, 13.6.2017) Določite definicijsko območje realne funkcije, podane s predpisom $f(x) = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$. Ali je funkcija soda ali liha ali nič od tega? Poiščite njene ničle, intervale naraščanja in padanja, konveksnosti in konkavnosti ter skicirajte njen graf. V katerih točkah definicijskega območja prvi in drugi odvod funkcije ne obstajata?

Rešitev:

- Definicijsko območje: Ker nastopa izraz $1-x^2$ pod znakom kvadratnega korena, mora biti
$$1 - x^2 \geq 0. \tag{27}$$
Z upoštevanjem definicijskega območja funkcije $\arcsin x$, imamo še dvojno neenakost:
$$-1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1. \tag{28}$$
Neenačbo (27) lahko zapišemo kot $(1-x)(1+x) \geq 0$, katere rešitev je interval $[-1, 1]$.
Ker je $\sqrt{1-x^2} \geq 0 \geq -1$, neenakost $\sqrt{1-x^2} \geq -1$ velja za vsak x, za katerega je $\sqrt{1-x^2}$ definiran. Rešimo še neenačbo $\sqrt{1-x^2} \leq 1$. Ker sta obe strani te neenačbe pozitivni, neenačbo lahko kvadriramo in dobimo ekvivalentno neenačbo $1 - x^2 \leq 1$. Zadnja neenačba se poenostavi v $x^2 \geq 0$, ki velja za vsak $x \in \mathbb{R}$. Definicijsko območje dane funkcije je presek rešitev obravnavanih neenačb (27) in (28), torej interval $D_f = [-1, 1]$.
- Ničle: Enačba $\arcsin\sqrt{1-x^2} = 0$ je ekvivalentna enačbi $\sqrt{1-x^2} = 0$. Če zadnjo enačbo kvadriramo, dobimo $1 - x^2 = 0$, torej je $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$. Obe dobljeni rešitvi ležita v definicijskem območju dane funkcije in sta zato ničli dane funkcije.
- Sodost/lihost: Ker je
$$f(-x) = \arcsin\sqrt{1-(-x)^2} = \arcsin\sqrt{1-x^2} = f(x),$$
je dana funkcija soda, kar pomeni, da je njen graf simetričen glede na os y.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Ker je $f(-1) = f(1) = 0$, je zaradi zveznosti tudi
$$\lim_{x\searrow -1} f(x) = f(-1) = 0 \text{ in } \lim_{x\nearrow 1} f(x) = f(1) = 0.$$
- Intervali monotonosti in ekstremi: Ker so stacionarne točke rešitve enačbe $f'(x) = 0$, izračunamo prvi odvod:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (0,1) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Dobljeni izraz za odvod ni definiran za $x = 0$. Zato je odvod v točki 0 treba izračunati po definiciji. Desni odvod je enak

$$f'_+(0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{1 - h^2} - \frac{\pi}{2}}{h}.$$

Za računanje zadnje limite lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo in dobimo (z upoštevanjem, da je $h > 0$)

$$f'_+(0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}}{1} = -1.$$

Podobno (ali na podlagi sodosti) imamo $f'_-(0) = 1$. Ker $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, funkcija f točki 0 ni odvedljiva.

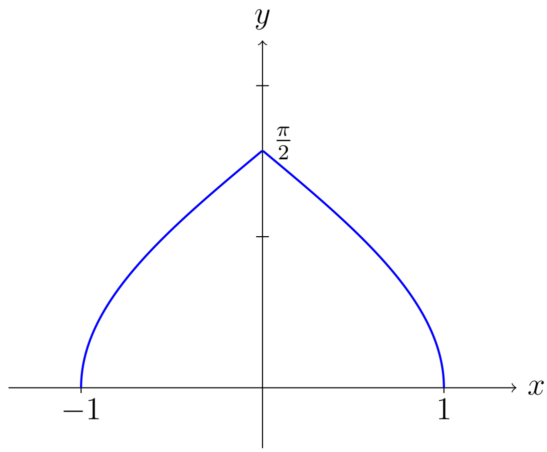
Za $x \in (-1, 0)$, je $f'(x) > 0$ in zato je funkcija na tem intervalu naraščajoča. Za $x \in (0, 1)$ je $f'(x) < 0$ in zato je funkcija na tem intervalu padajoča. Vidimo, da je v točki $x = 0$ lokalni maksimum. Vrednost funkcije v tej točki je $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti: Za določanje intervalov konveksnosti in konkavnosti uporabimo drugi odvod. Izračunajmo $f''(x)$ za $x \in (-1, 0)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)' = \left((1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}. \end{aligned}$$

Ker je na intervalu $(-1, 0)$ števec zadnjega ulomka negativen in imenovalec pozitiven, je $f''(x) < 0$ na $(-1, 0)$ in zato je na intervalu $(-1, 0)$ funkcija f konkavna. Podobno (ali z upoštevanjem sodosti) se prepričamo, da je $f''(x) < 0$ tudi na $(0, 1)$ in zato je na intervalu $(-1, 0)$ funkcija f konkavna. Torej, točka $x = 0$ (v kateri prvi odvod, in zato tudi drugi odvod, ne obstajata) ni prevojna točka.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



y
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
1

13 Integral

81. (2. kolokvij, 13.1.2014) Izračunajte

$$\int_0^1 (1+e^{2x})\sqrt{e^{2x}-1}\,dx.$$

Rešitev: V integral uvedemo novo spremenljivko $t=\sqrt{e^{2x}-1}$ oz. $t^2=e^{2x}-1$, torej

$$2t\,dt = 2e^{2x}\,dx \quad \text{oz.} \quad dx=\frac{t\,dt}{e^{2x}}=\frac{t\,dt}{t^2+1}.$$

Zaradi uvedbe nove spremenljivke moramo ustrezno spremeniti tudi meje integrala.

$$I=\int_0^1 (1+e^{2x})\sqrt{e^{2x}-1}\,dx=\int_0^{\sqrt{e^2-1}}\frac{(t^2+2)t^2}{t^2+1}\,dt.$$

Pod integralskim znakom smo dobili racionalno funkcijo. Ker je stopnja polinoma v števcu večja od stopnje polinoma v imenovalcu, števec najprej delimo z imenovalcem:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ t^4+2t^2\big) : \big(t^2+1\big) = t^2+1+\dfrac{-1}{t^2+1} \\
\underline{-t^4\ \ -t^2} \\
\qquad\quad t^2 \\
\qquad \underline{-t^2-1} \\
\qquad\qquad -1
\end{array}$$

in izračunamo

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\sqrt{e^2-1}}\left(t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}+t-\arctan t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{e^2-1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{e^2-1}\right)^3}{3}+\sqrt{e^2-1}-\arctan\sqrt{e^2-1}.
\end{aligned}$$

Opomba: Namesto nove spremenljivke $t=\sqrt{e^{2x}-1}$ bi lahko uvedli tudi novo spremenljivko $t=e^{2x}-1$ ali pa $t=e^{2x}$, vendar bi potem morali uvesti še eno novo spremenljivko in sicer $z=\sqrt{t}$ oz. $z=\sqrt{t-1}$.

82. (2. izpit, 11.2.2016) Izračunajte ploščino lika, ki je omejen z osjo x in grafom funkcije
$$f(x) = x^3 \cos x^2$$
ter vsebuje točko $\left(1, \frac{1}{10}\right)$.

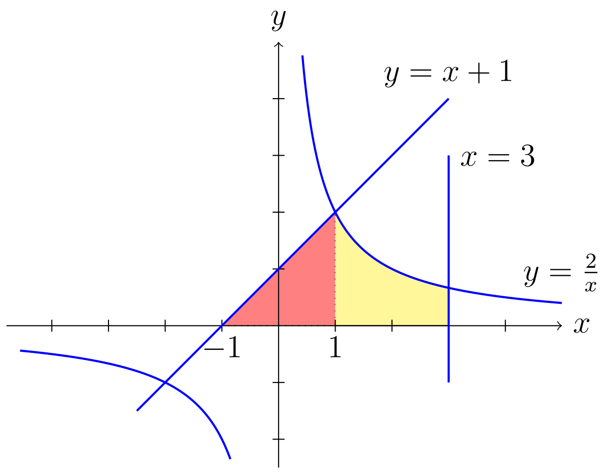
Rešitev: Pri računanju ploščine lika običajno potrebujemo dobro skico. Ker bi risanje dobre skice grafa funkcija $f(x)$ zahtevalo kar nekaj dela, bomo določili samo ničle funkcije in s pomočjo prve koordinate točke $\left(1, \frac{1}{10}\right)$ določi meje integrala. Poleg $x_0 = 0$ so ničle tudi rešitve enačbe $\cos x^2 = 0$, torej $x_{\pm k} = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Ker je $x_0 = 0 < 1 < \sqrt{\frac{\pi}{2}} = x_1$ in $f(x) > 0$ na intervalu $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$, je ploščina lika
$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$
enaka
$$p(L) = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \cos x^2 \, dx.$$

V integral uvedemo novo spremenljivko $t = x^2$, torej $dt = 2x\, dx$. Potem je
$$x^3 \cos x^2 \, dx = x^2 (\cos x^2)\, x\, dx = t \cos t \, \frac{dt}{2}.$$

Zaradi uvedbe nove spremenljivke moramo ustrezno spremeniti tudi meje integrala. Dobljeni integral potem izračunamo z metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = t$ in $dv = \cos t\, dt$, torej $du = dt$ in $v = \sin t$.
$$\begin{aligned} p(L) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left((t \sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi - 2}{4}. \end{aligned}$$

83. (1. izpit, 23.1.2017) Izračunajte ploščino lika, omejenega s krivuljami
$$y = \frac{2}{x},\ y = x + 1,\ y = 0 \text{ in } x = 3.$$

Rešitev: Najprej poiščimo presečišča grafov $y = \frac{2}{x}$ in $y = x+1$. Če enačbo $\frac{2}{x} = x+1$ pomnožimo z x in uredimo, dobimo enačbo $(x+2)(x-1) = 0$. Zdaj lahko narišemo dobro skico.



Iz skice razberemo, da je ploščina lika enaka

$$
\begin{aligned}
p(L) &= \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx + \int_{1}^{3} \frac{2}{x}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1} + 2\ln|x|\Big|_{1}^{3} \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1 + 2(\ln 3 - \ln 1) = 2 + 2\ln 3 = 2(1 + \ln 3).
\end{aligned}
$$

84. (2. izpit, 6.2.2017) Izračunajte

$$(a) \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty x e^{-2x}\,dx.$$

Rešitev:

(a) V integral uvedemo novo spremenljivko $t = x^2 + 1$, torej $dt = 2x\,dx$.

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

(b) Izračunati moramo posplošeni integral. Najprej z metodo integracije po delih izračunamo nedoločeni integral, kjer izberemo $u = x$ in $dv = e^{-2x}\,dx$, torej $du = dx$ in $v = -\frac{e^{-2x}}{2}$.

$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C = -\frac{(2x+1)e^{-2x}}{4} + C.$$

Posplošeni integral $\int\limits_0^\infty xe^{-2x}\,dx$ konvergira, če obstaja

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b xe^{-2x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{(2x+1)e^{-2x}}{4}\right)\Bigg|_0^b \\ = \quad -\lim_{b\to\infty}&\left(\frac{(2b+1)e^{-2b}}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\frac{2b+1}{e^{2b}} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

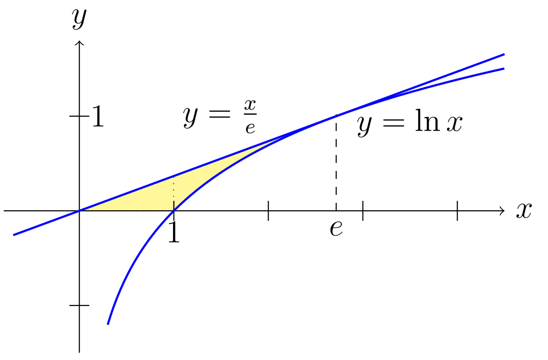
Ko gre $b \to \infty$, gresta gresta števec in imenovalec ulomka $\frac{2b+1}{e^{2b}}$ proti ∞. Imamo nedoločenost oblike $\frac{\infty}{\infty}$, ki jo poskusimo odpraviti z uporabo l'Hospitalovega pravila:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{2b+1}{e^{2b}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{b\to\infty}\frac{2}{2e^{2b}} = 0.$$

Torej je $\int\limits_0^\infty xe^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$.

85. (3. izpit, 13.6.2017) Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepajo abscisna os, graf funkcije $f(x) = \ln x$ ter tista tangenta na graf $f(x)$, ki poteka skozi točko $(e, 1)$.

Rešitev: Najprej poiščimo enačbo tangente na graf v točki $(e, 1)$. Naklonski koeficient k tangente $y = kx + n$ je enak vrednosti odvoda funkcije $f'(x) = \frac{1}{x}$ v točki e, torej $k = \frac{1}{e}$. Ker točka $(e, 1)$ leži na tangenti, velja $1 = ke + n = \frac{1}{e} \cdot e + n = 1 + n$, torej $n = 0$. Enačba tangente je tako $y = \frac{x}{e}$.



Iz skice razberemo, da lahko ploščino lika izračunamo na dva načina:

$$p(L) = \int_0^1 \frac{x}{e}\,dx + \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x\right)\,dx \quad \text{ali} \quad p(L) = \frac{e}{2} - \int_1^e \ln x\,dx.$$

V drugem načinu od ploščine trikotnika z oglišči $(0,0)$, $(e,0)$ in $(e,1)$, ki je enaka $\frac{e}{2}$, odštejemo ploščino krivočrtnega območja z oglišči $(1,0)$, $(e,0)$ in $(e,1)$. Uporabimo drugi način, ker zahteva manj računanja. Integral izračunamo z metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = \ln x$ in $dv = dx$, torej $du = \frac{1}{x}\,dx$ in $v = x$.

$$p(L) = \frac{e}{2} - \left(x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx\right) = \frac{e}{2} - \left(e - x\Big|_1^e\right) = \frac{e}{2} - 1.$$

14 Odvod in integral

86. (1. izpit, 23.1.2014) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = (\ln x)^2.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

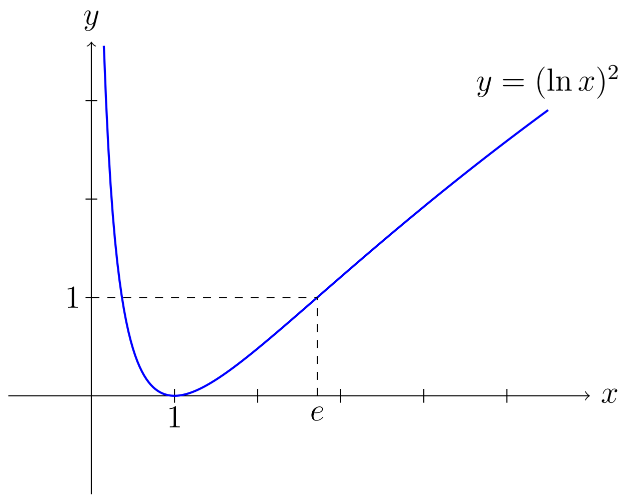
(c) Določite ploščino lika L, ki ga omejujejo graf funkcije, tangenta v točki $(e, 1)$ in abscisna os.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker je funkcija $\ln x$ definirana na intervalu $(0, \infty)$, je tudi funkcija $f(x) = (\ln x)^2$ definirana na intervalu $(0, \infty)$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ker je $(\ln x)^2 = 0$ natanko takrat, ko je $\ln x = 0$, je edina ničla dane funkcije $x = 1$.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Najprej določimo obnašanje funkcije, ko $x \to \infty$. Ker je $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, je $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^2 = \infty$. Določimo še obnašanje funkcije, ko $x \searrow 0$. Ker je $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln x = -\infty$, je $\lim\limits_{x\searrow 0} (\ln x)^2 = \infty$.
- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke: $f'(x) = 2\ln x \cdot (\frac{1}{x}) = \frac{2\ln x}{x}$. Stacionarne točke so torej rešitve enačbe $\frac{2\ln x}{x} = 0$. Ker ima enačba samo rešitev $x = 1$, ima funkcija eno samo stacionarno točko. Funkcija je definirana samo za pozitivna števila, zato o predznaku odvoda odloča predznak funkcije $\ln x$. Ker je $f'(x) < 0$ za vse $x \in (0, 1)$, funkcija f pada na intervalu $(0, 1)$ in raste na intervalu $(1, \infty)$. Torej ima v točki $x = 1$ globalni minimum.
- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:
$$f''(x) = \left(\frac{2\ln x}{x}\right)' = 2\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2}\right) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}.$$

Torej $f''(x) = 0$ velja, kadar je $1 - \ln x = 0$. Enačba ima eno samo rešitev $x = e$. Ker je neenačba $a > b$ ekvivalentna neenačbi $\ln a > \ln b$, za $x > e$ velja $\ln x > 1$. Torej na intervalu (e, ∞) velja $f''(x) < 0$ in zato je funkcija konkavna. Če je $0 < x < e$, je $f''(x) > 0$ in zato je funkcija na območju $(0, e)$ konveksna. Točka $x = e$ je zato edini prevoj dane funkcije.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



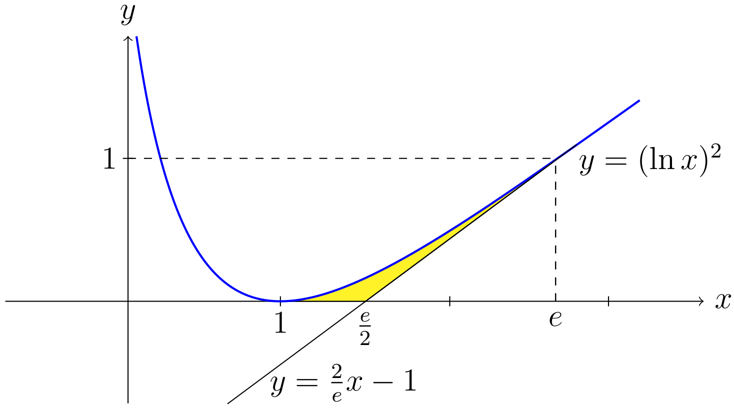
(b) Integral izračunamo z metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = (\ln x)^2$ in $dv = dx$, torej $du = \frac{2\ln x}{x}\,dx$ in $v = x$.

$$I = \int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - \int \frac{2\ln x}{x} \cdot x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx.$$

Za izračun integrala $\int \ln x\,dx$ še enkrat uporabimo metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = \ln x$ in $dv = dx$, torej $du = \frac{1}{x}\,dx$ in $v = x$.

$$\begin{aligned} I &= x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx\right) = x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C. \end{aligned}$$

(a) Najprej poiščimo enačbo tangente na graf v točki $(e, 1)$. Naklonski koeficient k tangente $y = kx + n$ je enak vrednosti odvoda funkcije $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ v točki e, torej $k = \frac{2}{e}$. Ker točka $(e, 1)$ leži na tangenti, velja $1 = ke + n = \frac{2}{e} \cdot e + n = 2 + n$, torej $n = -1$. Enačba tangente je tako $y = \frac{2}{e}x - 1$. Skicirajmo še graf funkcije in tangente ter osenčimo lik L:



Iz skice razberemo, da lahko ploščino lika izračunamo na dva načina:

$$p(L) = \int_1^{\frac{e}{2}} (\ln x)^2 \, dx + \int_{\frac{e}{2}}^{e} \left((\ln x)^2 - \left(\frac{2}{e} x - 1 \right) \right) dx$$

ali

$$p(L) = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx - \frac{e}{4},$$

kjer je $\frac{e}{4}$ ploščina trikotnika z oglišči $(\frac{e}{2}, 0)$, $(e, 0)$ in $(e, 1)$. Uporabimo drugi način, saj smo v točki (b) nedoločeni integral že izračunali:

$$\begin{aligned} p(L) &= \int_1^e (\ln x)^2 \, dx - \frac{e}{4} = \left(x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right) \Big|_1^e - \frac{e}{4} \\ &= (e - 2e + 2e) - 2 - \frac{e}{4} = \frac{3e}{4} - 2. \end{aligned}$$

87. (2. izpit, 7.2.2014) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, začetno vrednost, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

(c) Izračunajte $I = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$. Kakšen je geometrijski pomen števila I?

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker sta funkciji $x^2 + 1$ in e^x definirani za vse realne x, je $D_f = \mathbb{R}$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ker je $x^2 + 1 > 0$ in $e^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, dana funkcija nima nobene ničle.
- Začetna vrednost je $f(0) = 1$.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Ko gre $x \to \infty$, gre $x^2 + 1 \to \infty$ in $e^x \to \infty$, torej

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + 1)e^x = \infty.$$

Ko gre $x \to -\infty$, gre $x^2 + 1 \to \infty$ in $e^x \to 0$. Torej imamo nedoločenost oblike $\infty \cdot 0$, ki jo prepišemo v nedoločenost oblike $\frac{\infty}{\infty}$, da lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 1)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:

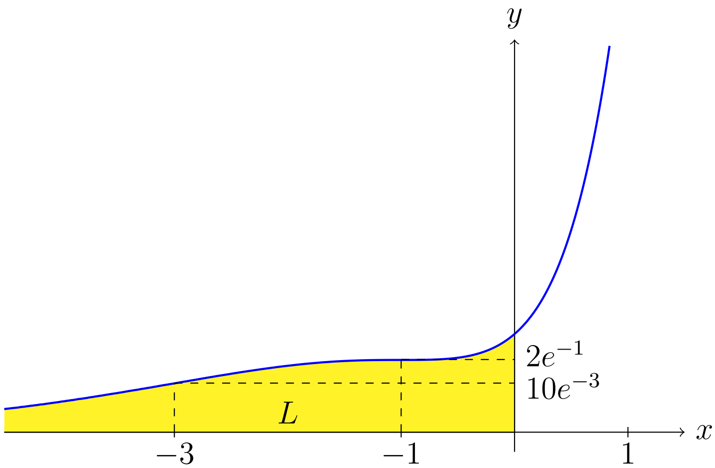
$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = (2x + x^2 + 1)e^x = (x + 1)^2 e^x.$$

Ker je $(x + 1)^2 \geq 0$ in $e^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in D_f$. Ker je $f'(x) = 0$ samo v točki $x = -1$, funkcija f raste povsod na svojem definicijskem območju. Funkcija ima stacionarno točko v $x = -1$, vendar je v njej prevoj.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$f''(x) = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x = (x+1)(2+x+1)e^x = (x+1)(x+3)e^x.$$

  Ker je $e^x > 0$ za $x \in D_f$, je predznak $f''(x)$ enak predznaku izraza $(x+1)(x+3)$. Če je $-3 < x < -1$, je torej $f''(x) < 0$ in zato je funkcija f na intervalu $(-3,-1)$ konkavna. Če je $x < -3$ ali $x > -1$, je $f''(x) > 0$ in zato je funkcija f na območju $(-\infty,-3) \cup (-1,\infty)$ konveksna. Rešitvi enačbe $f''(x) = 0$ sta točki $x = -3$ in $x = -1$, ki sta prevoja funkcije. Vrednosti funkcije v prevojnih točkah sta $f(-3) = 10e^{-3}$ in $f(-1) = 2e^{-1}$.
- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



(b) Integral izračunamo z metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = x^2+1$ in $dv = e^x dx$, torej $du = 2x\,dx$ in $v = e^x$.

$$A = \int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x\,dx = (x^2+1)e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Za izračun integrala $\int xe^x\,dx$ še enkrat uporabimo metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = x$ in $dv = e^x dx$, torej $du = dx$ in $v = e^x$.

$$\begin{aligned} A &= (x^2+1)e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = (x^2+1)e^x - 2(xe^x - e^x) + C \\ &= (x^2+1-2x+2)e^x + C = (x^2-2x+3)e^x + C. \end{aligned}$$

(c) Posplošeni integral $\int\limits_{-\infty}^{0} (x^2+1)e^x\,dx$ konvergira, če obstaja

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 (x^2+1)e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} (x^2-2x+3)e^x\Big|_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty}(3-(a^2-2a+3)e^a) = 3 - \lim_{a\to-\infty}(a^2-2a+3)e^a \end{aligned}$$

Ko gre $a\to-\infty$, gre $a^2-2a+3\to\infty$ in $e^a\to 0$, torej imamo nedoločenost oblike $\infty\cdot 0$, ki jo prepišemo v nedoločenost oblike $\frac{\infty}{\infty}$, da lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo.

$$\lim_{a\to-\infty}(a^2-2a+3)e^a = \lim_{a\to-\infty}\frac{a^2-2a+3}{e^{-a}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{a\to-\infty}\frac{2a-2}{-e^{-a}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{a\to-\infty}\frac{2}{e^{-a}} = 0.$$

Torej je $I=3$.

Število I je enako ploščini lika L, ki ga omejujejo negativna os x, graf funkcije f za $x<0$ in os y. Lik L je na sliki osenčen.

88. (3. izpit, 9.6.2014) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost oz. lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije in pozitivna abscisna os.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker izraz $4-x^2$ nastopa pod znakom kvadratnega korena, mora biti $4-x^2\geq 0$. Neenačbo lahko prepišemo v $(2-x)(2+x)\geq 0$, katere rešitev je interval $[-2,2]$, torej $D_f=[-2,2]$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x)=0$. Dana funkcija ima tri ničle: $x_1=0$, $x_2=-2$ in $x_3=2$.
- Sodost/lihost: Ker je

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x),$$

je funkcija liha.

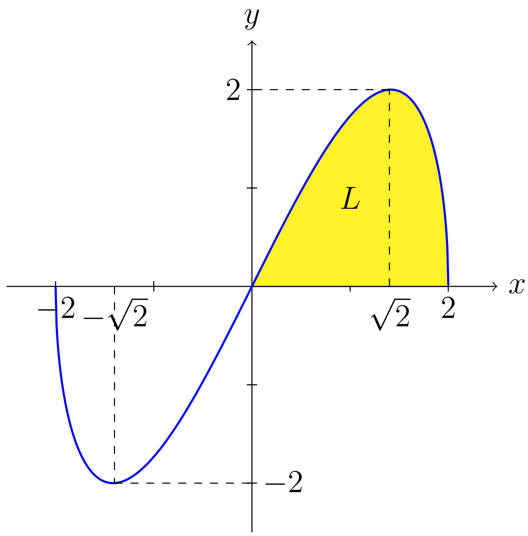
- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

  Ker je $\sqrt{4-x^2} > 0$ na $(-2,2)$, ima $f'(x)$ enak predznak kot izraz $2-x^2$. Torej bo $f'(x) > 0$, če bo $2-x^2 > 0$. Zadnjo neenačbo prepišemo v $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) > 0$, katere rešitev je interval $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Torej funkcija f raste na intervalu $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ in pada na območju $(-2,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},2)$. Funkcija ima dve stacionarni točki $x_1 = -\sqrt{2}$, $f(x_1) = -2$, v kateri je globalni minimum, in $x_2 = \sqrt{2}$, $f(x_2) = 2$, v kateri je globalni maksimum.
- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\left(\frac{x^2-2}{\sqrt{4-x^2}}\right)' = -2\left(\frac{2x\sqrt{4-x^2} - (x^2-2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2}\right) \\ &= -2\left(\frac{\frac{2x(4-x^2)+x(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}\right) = -2\left(\frac{x(8-2x^2+x^2-2)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}\right) \\ &= \frac{-2x(6-x^2)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

  Ker so izrazi $6-x^2$, $4-x^2$ in $\sqrt{4-x^2}$ na intervalu $(-2,2)$ pozitivni, je predznak $f''(x)$ odvisen od predznaka x. Če je $x > 0$, je $f''(x) < 0$ in zato je funkcija f na intervalu $(0,2)$ konkavna. Če je $x < 0$, je $f''(x) > 0$ in zato je funkcija f na intervalu $(-2,0)$ konveksna. Rešitev enačbe $f''(x) = 0$ za $x \in (-2,2)$ je točka $x = 0$, ki je prevojna točka.
- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



Opomba: Ker je funkcija f liha, bi lahko računali stacionarne točke, intervale monotonosti, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti ter narisali graf funkcijele le za $x \geq 0$. Zaradi lihosti funkcije f je del grafa funkcije f za $x < 0$ določen z delom grafa funkcije f za $x > 0$ (ta del grafa moramo prezrcaliti preko koordinatnega izhodišča). Iz celotnega grafa bi dobili podatke o ekstremih, intervalih naraščanja in padanja, prevojih ter intervalih konveksnosti in konkavnosti funkcije f tudi za $x < 0$.

(b) Ploščina lika L, ki ga omejujeta graf funkcije in pozitivna abscisna os je enaka

$$p(L) = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

V integral uvedemo novo spremenljivko $t = \sqrt{4-x^2}$ oz. $t^2 = 4-x^2$, torej

$$2t\,dt = -2x\,dx \quad \text{oz.} \quad xdx = -tdt.$$

Zaradi uvedbe nove spremenljivke moramo ustrezno spremeniti tudi meje integrala. Torej

$$p(L) = -\int_2^0 t^2\,dt = \int_0^2 t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

89. (4. izpit, 1.9.2014) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^2 + 1}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, asimptoto, ekstreme, intervale monotonosti in narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

(c) Izračunajte $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$. Kakšen je geometrijski pomen števila I?

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker je f racionalna funkcija in je njen imenovalec $x^2 + 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je $D_f = \mathbb{R}$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ničli funkcije sta rešitvi enačbe $x - x^2 = 0$. Torej ima f dve ničli, $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Ker je f racionalna funkcija lahko z deljenjem števca in imenovalca določimo njeno asimptoto:

$$\begin{array}{l} \big(-x^2 + x\big) : \big(x^2 + 1\big) = -1 + \dfrac{x+1}{x^2+1}. \\ \underline{\;\; x^2 \qquad\quad + 1} \\ \qquad\qquad x + 1 \end{array} \tag{29}$$

  Torej ima f vodoravno asimptoto $y = -1$. Ker ima ostanek $\frac{x+1}{x^2+1}$ ničlo v $x = -1$, graf funkcije seka asimptoto v točki $(-1, -1)$.
- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-2x)(x^2+1) - (x-x^2)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^3 - 2x - 2x^2 + 2x^3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

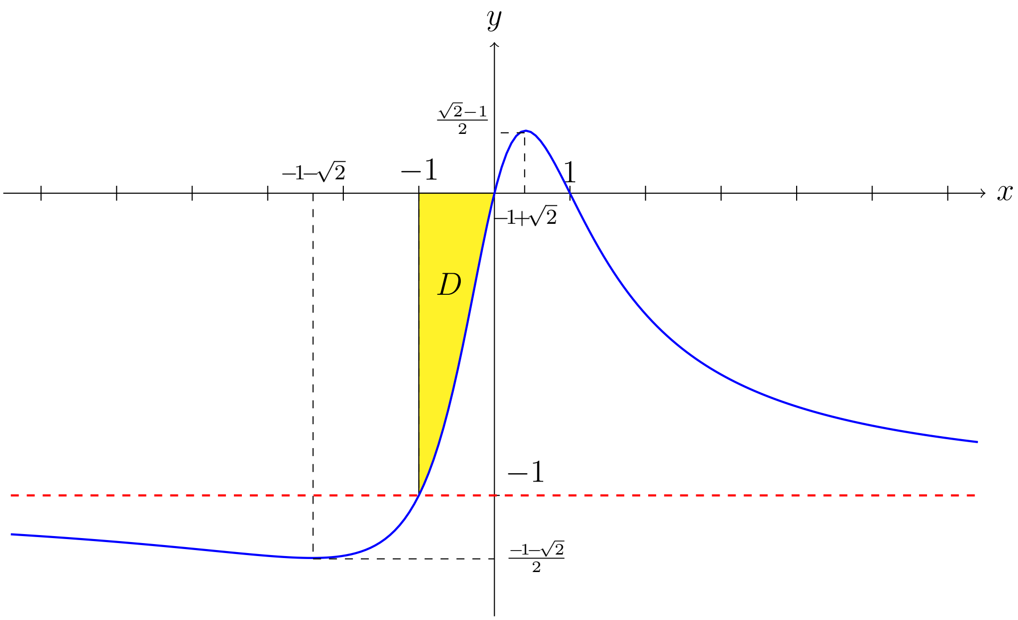
  Ker je $(x^2 + 1)^2 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je predznak odvoda enak predznaku izraza $-x^2 - 2x + 1$. Enačba $-x^2 - 2x + 1 = 0$ ima ničli $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ in

$x_2 = -1+\sqrt{2}$. Neenačbo $f'(x) > 0$ lahko prepišemo v neenačbo

$$-(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) > 0,$$

katere rešitev je interval $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$. Torej funkcija f raste na intervalu $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ in pada na območju $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$. Funkcija ima dve stacionarni točki $x_1 = -1-\sqrt{2}$, $f(x_1) = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$, v kateri je globalni minimum, in $x_2 = -1+\sqrt{2}$, $f(x_2) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, v kateri je globalni maksimum.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



(b) Pri računanju integrala $I = \int f(x)\,dx$ najprej upoštevamo, da je f racionalna funkcija, katere stopnja števca in imenovalca sta enaki. Zato najprej števec delimo z imenovalcem, kar smo že izračunali v (29). Izračunajmo:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{x-x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left(-1 + \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx \\
&= -\int dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= -x + \int \frac{x}{x^2+1} dx + \arctan x.
\end{aligned}$$

V integral $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ uvedemo novo spremenljivko $t = x^2+1$, torej

$$dt = 2x\,dx \quad \text{oz.} \quad xdx = \frac{dt}{2}.$$

Dobimo

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Torej je

$$\int f(x)\,dx = -x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C. \tag{30}$$

(c) Ker smo v točki (b) že izračunali nedoločeni integral (30), moramo za izračun določenega integrala samo še vstaviti meje

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left(-x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x\right)\Big|_{-1}^{0} \\ &= 0 - \left(1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \arctan(-1)\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi - 2\ln 2 - 4}{4}. \end{aligned}$$

Število I je enako negativno predznačeni ploščini lika D, ki je označen na sliki.

90. (1. izpit, 29.1.2015) Dan je funkcijski predpis $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$.

(a) Določite definicijsko območje, ničle, obnašanje funkcije na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte ploščino omejenega lika D, ki ga določata graf funkcije f in abscisna os.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker izraz $x+1$ nastopa pod znakom kvadratnega korena, mora biti $x+1 \geq 0$. Torej je $D_f = [-1, \infty)$.
- Ničle: Ko rešimo enačbo $f(x) = 0$, dobimo ničle dane funkcije: $x_1 = -1$ in $x_{2,3} = 0$.

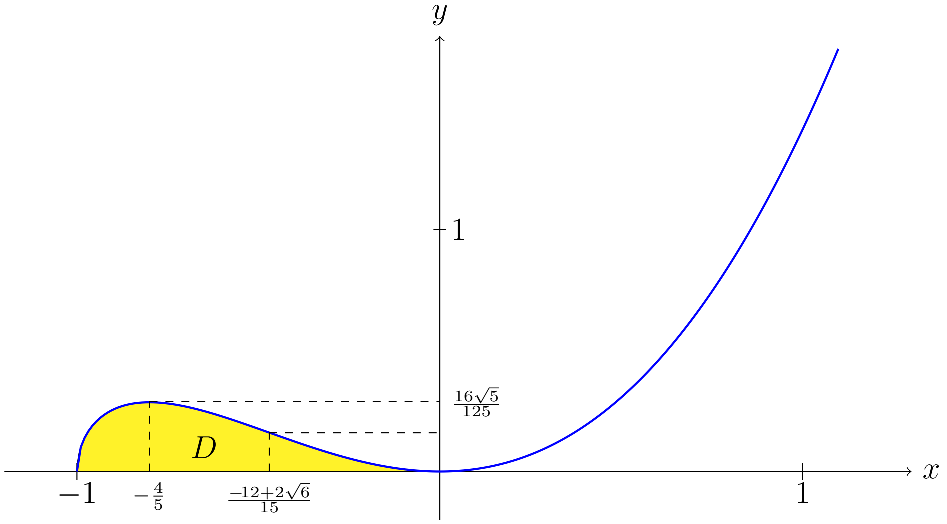
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: V točki $x = -1$ ima dana funkcija ničlo, zato moramo samo še določiti obnašanje funkcije, ko $x \to \infty$:
$$\lim_{x\to\infty} x^2\sqrt{x+1} = \infty.$$
- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{x+1} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4x(x+1)+x^2}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$
Ker je $\sqrt{x+1} > 0$ na $(-1,\infty)$, ima $f'(x)$ enak predznak kot izraz $x(5x+4)$. Torej bo $f'(x) > 0$, če bo $x(5x+4) > 0$. Ker je rešitev neenačbe enaka $(-\infty,-\frac{4}{5})\cup(0,\infty)$, funkcija f na $(-\infty,-\frac{4}{5})\cup(0,\infty)$ raste in pada na intervalu $(-\frac{4}{5},0)$. Funkcija ima dve stacionarni točki $x = -\frac{4}{5}$, $f(-\frac{4}{5}) = \frac{16\sqrt{5}}{125}$, v kateri je lokalni maksimum, in $f(0) = 0$, v kateri je lokalni minimum.
- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(10x+4)2\sqrt{x+1} - (5x^2+4x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} \\ &= \frac{(10x+4)2(x+1) - (5x^2+4x)}{4(x+1)\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{20x^2+28x+8-5x^2-4x}{4(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{15x^2+24x+8}{4(x+1)\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$
Ker je izraz $(x+1)\sqrt{x+1}$ na intervalu $(-1,\infty)$ pozitiven, je predznak $f''(x)$ odvisen od predznaka izraza $15x^2+24x+8$. Enačba $15x^2+24x+8 = 0$ ima ničli $x_1 = \frac{-12-2\sqrt{6}}{15}$ in $x_2 = \frac{-12+2\sqrt{6}}{15}$. Neenačbo $f''(x) > 0$ lahko prepišemo v neenačbo
$$\left(x - \frac{-12-2\sqrt{6}}{15}\right)\left(x - \frac{-12+2\sqrt{6}}{15}\right) > 0,$$
katere rešitev je območje $\left(-\infty, \frac{-12-2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{-12+2\sqrt{6}}{15}, \infty\right)$. Ker interval $\left(-\infty, \frac{-12-2\sqrt{6}}{15}\right)$ ni vsebovan v D_f, je funkcija konveksna na intervalu

$(\frac{-12+2\sqrt{6}}{15}, \infty)$. Ker velja

$$\left(\frac{-12-2\sqrt{6}}{15}, \frac{-12+2\sqrt{6}}{15}\right) \cap D_f = \left(-1, \frac{-12+2\sqrt{6}}{15}\right),$$

je funkcija konkavna na intervalu $(-1, \frac{-12+2\sqrt{6}}{15})$.
Funkcija ima prevojno točko v $x = \frac{-12+2\sqrt{6}}{15}$.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



(b) Ploščina omejenega lika D, ki ga določata graf funkcije in negativna abscisna os je enaka

$$p(D) = \int_{-1}^{0} x^2\sqrt{x+1}\,dx.$$

V integral uvedemo novo spremenljivko $t = \sqrt{x+1}$ oz. $t^2 = x+1$, torej $2t\,dt = dx$ in $x = t^2 - 1$. Zaradi uvedbe nove spremenljivke moramo ustrezno spremeniti tudi meje integrala. Torej

$$p(D) = 2\int_{0}^{1} t^2(t^2-1)^2\,dt = 2\int_{0}^{1} (t^6 - 2t^4 + t^2)\,dt = 2\left(\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{105}.$$

91. (2. izpit, 12.2.2015) Za funkcijo $f(x) = (x-1)^2 e^x$

(a) določite največjo in najmanjšo vrednost na intervalu $[-2,2]$ in točki, v katerih sta doseženi;

(b) izračunajte $\int_0^2 f(x)\,dx$ in utemeljite, ali je vrednost integrala enaka ploščini lika, ki ga graf funkcije f oklepa z osjo x na intervalu $[0,2]$.

Rešitev:

(a) Ker je dana funkcija f zvezna in odvedljiva na $\mathbb{R} = D_f$, funkcija na zaprtem intervalu $[-2,2]$ doseže največjo in najmanjšo vrednost bodisi na robu intervala bodisi v stacionarnih točkah funkcije f, ki ležijo v $(-2,2)$.

Izračunajmo najprej vrednosti funkcije v robnih točkah $x_a = -2$ in $x_b = 2$;

$$f(x_a) = f(-2) = (-2-1)^2 e^{-2} = 9e^{-2},$$

$$f(x_b) = f(2) = (2-1)^2 e^2 = e^2.$$

Poiščimo še stacionarne točke funkcije. Najprej izračunajmo odvod:

$$f'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = (x-1)e^x(2+x-1) = (x+1)(x-1)e^x.$$

Ker je $f'(x) = 0$ v $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$, sta x_1 in x_2 stacionarni točki funkcije f. Ker obe stacionarni točki ležita v notranjosti intervala $[-2,2]$, sta obe kandidata za točko, kjer funkcija zavzame največjo oz. najmanjšo vrednost. Zato izračunajmo še vrednosti v obeh:

$$f(x_1) = f(-1) = (-1-1)^2 e^{-1} = 4e^{-1} \quad \text{in} \quad f(x_2) = f(1) = (-1+1)^2 e^1 = 0.$$

Najmanjšo in največjo vrednost določimo s primerjavo vrednosti v točkah x_a, x_1, x_2 in x_b. Ker so vse vrednosti nenegativne, je minimalna vrednost na intervalu $[-2,2]$ enaka 0 in je dosežena v točki $x_2 = 1$. Ker je $e^2 - 9e^{-2} = \frac{e^3-9}{e^2} > 0$ in $e^2 - 4e^{-1} = \frac{e^3-4}{e} > 0$, je maksimalna vrednost na intervalu $[-2,2]$ enaka e^2 in je dosežena v $x_b = 2$.

(b) Integral izračunamo z metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = (x-1)^2$ in $dv = e^x dx$, torej $du = 2(x-1)\,dx$ in $v = e^x$.

$$I = \int_0^2 (x-1)^2 e^x\,dx = \left((x-1)^2 e^x\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 2(x-1)e^x\,dx = e^2 - 1 - 2\int_0^2 (x-1)e^x\,dx.$$

Za izračun integrala $\int\limits_0^2 (x-1)e^x\,dx$ še enkrat uporabimo metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = x-1$ in $dv = e^x dx$, torej $du = dx$ in $v = e^x$.

$$\begin{aligned} I &= e^2 - 1 - 2\left(\left((x-1)e^x\right)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 e^x\,dx\right) = e^2 - 1 - 2\left(e^2 + 1 - e^x\Big|_0^2\right) \\ &= e^2 - 1 - 2(e^2 + 2 - e^2 + 2) = e^2 - 5. \end{aligned}$$

Ker je $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je vrednost I enaka ploščini lika.

92. (3. izpit, 15.6.2015) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \ln(x^2+1).$$

(a) Določite definicijsko območje, sodost, lihost, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte $\int f(x)dx$.

(c) Določite ploščino lika D, ki ga omejujeta graf funkcije in premica z enačbo $y = \ln 2$.

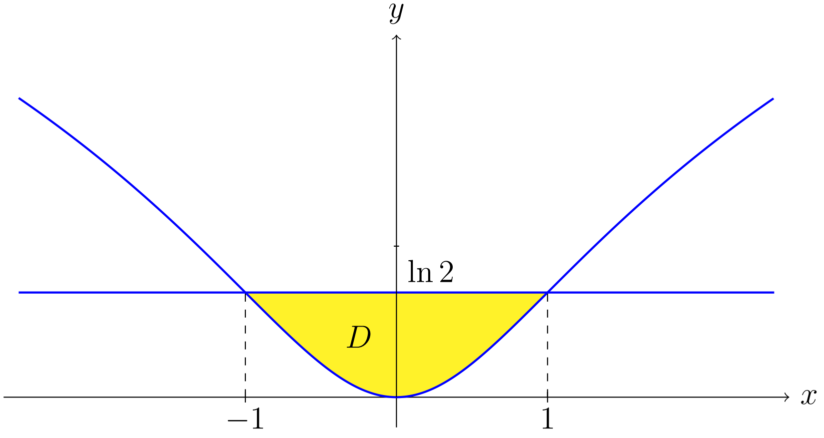
Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker je funkcija $\ln x$ definirana na intervalu $(0, \infty)$ in je $x^2 + 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je $D_f = \mathbb{R}$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ker je $\ln(x^2+1) = 0$ natanko takrat, ko je $x^2 + 1 = 1$, ima funkcija eno dvojno ničlo $x_{1,2} = 0$.
- Sodost/lihost: Ker je $f(-x) = \ln\left((-x)^2 + 1\right) = \ln\left(x^2+1\right) = f(x)$, je funkcija f soda.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Najprej določimo obnašanje funkcije, ko $x \to \infty$. Ker je $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1) = \infty$ in $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, je tudi
$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^2+1) = \infty.$$
Zaradi sodosti je tudi $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = \infty$.

- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Ker ima enačba $f'(x) = 0$ le rešitev $x = 0$, je to edina stacionarna točka. Ker je $x^2 + 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, o predznaku odvoda odloča predznak funkcije x. Ker je $f'(x) < 0$ za vse $x < 0$, funkcija f pada na intervalu $(-\infty, 0)$ in raste na intervalu $(0, \infty)$. Torej ima funkcija v točki $x = 0$ globalni minimum.
- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

  Torej $f''(x) = 0$ velja, kadar je $1 - x^2 = 0$. Enačba ima dve rešitvi $x = -1$ in $x = 1$. Ker je imenovalec pozitiven za vsak $x \in \mathbb{R}$, je $f''(x) > 0$, kadar velja neenakost $1 - x^2 > 0$. Neenačbo lahko prepišemo v $(1-x)(1+x) > 0$, katere rešitev je interval $(-1, 1)$. Funkcija je torej konveksna na intervalu $(-1, 1)$ in konkavna na območju $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Točki $x_{1,2} = \pm 1$, $f(\pm 1) = \ln 2$, sta prevoja dane funkcije.
- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



  Opomba: Ker je funkcija f soda, bi lahko računali stacionarne točke, intervale monotonosti, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti ter narisali graf funkcije le za $x \geq 0$. Zaradi sodosti funkcije f je del grafa funkcije f za $x < 0$ določen z delom grafa funkcije f za $x > 0$ (ta del grafa moramo prezrcaliti preko osi y). Iz celotnega grafa dobimo podatke o ekstremih, intervalih naraščanja in padanja, prevojih ter intervalih konveksnosti in konkavnosti funkcije f tudi za $x < 0$.

(b) Integral izračunamo z metodo integracije po delih, kjer izberemo $u = \ln(x^2+1)$

in $dv = dx$, torej $du = \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ in $v = x$.

$$I = \int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx.$$

Ker je integrand racionalna funkcija, katere števec ima isto stopnjo kot imenovalec, najprej delimo:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^2\big) : \big(x^2+1\big) = 1 + \dfrac{-1}{x^2+1}. \\ \underline{-\,x^2 - 1} \\ \qquad -\,1 \end{array}$$

Potem je

$$\begin{aligned} I &= x\ln(x^2+1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= x\ln(x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C. \end{aligned}$$

(c) Ploščina območja D je enaka integralu

$$p(D) = \int_{-1}^{1} \big(\ln 2 - \ln(x^2+1)\big)\,dx = 2\int_{0}^{1} \big(\ln 2 - \ln(x^2+1)\big)\,dx.$$

Zadnja enakost velja, ker je funkcija f soda. Pri računanju uporabimo rezultat iz točke (b):

$$\begin{aligned} p(D) &= 2\left(\big(x\ln 2\big)\Big|_0^1 - \big(x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x\big)\Big|_0^1\right) \\ &= 2\left(\ln 2 - \ln 2 + 2 - \frac{\pi}{2}\right) = 4 - \pi. \end{aligned}$$

93. (4. izpit, 31.8.2015) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = 2 - \frac{x}{(x-1)^2}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, asimptoto, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte ploščino omejenega lika D, ki ga določajo graf funkcije in koordinatni osi.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker je f racionalna funkcija, je definirana povsod, razen v ničlah imenovalca, kjer ima pole. Torej je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Ničle. Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Najprej funkcijo zapišemo v obliki ulomka

$$f(x) = 2 - \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 - x}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{(x-1)^2}.$$

  Ničli funkcije sta rešitvi kvadratne enačbe $2x^2 - 5x + 2 = 0$, torej $x_1 = \frac{5-\sqrt{25-16}}{4} = \frac{1}{2}$ in $x_2 = \frac{5+\sqrt{25-16}}{4} = 2$.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Ker je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$, je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(2 - \frac{x}{(x-1)^2}\right) = 2$, ima funkcija vodoravno asimptoto $y = 2$. Ker je $f(x) = 2$, ko je $-\frac{x}{(x-1)^2} = 0$, graf funkcije seka asimptoto v točki $(0, 2)$. Poglejmo si še obnašanje funkcije, ko se funkcija približuje točki $x = 1$, kjer ima pol. Ker je v imenovalcu soda potenca, je $\lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\searrow 1} \frac{x}{(x-1)^2}$. Ko $x \to 1$, gre $x - 1 \to 0$. Ker je $(x-1)^2 > 0$ in $x > 0$, je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty \quad \text{in zato je} \quad \lim_{x\to 1} \left(2 - \frac{x}{(x-1)^2}\right) = -\infty.$$

- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{(x-1)(x-1-2x)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x+1}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

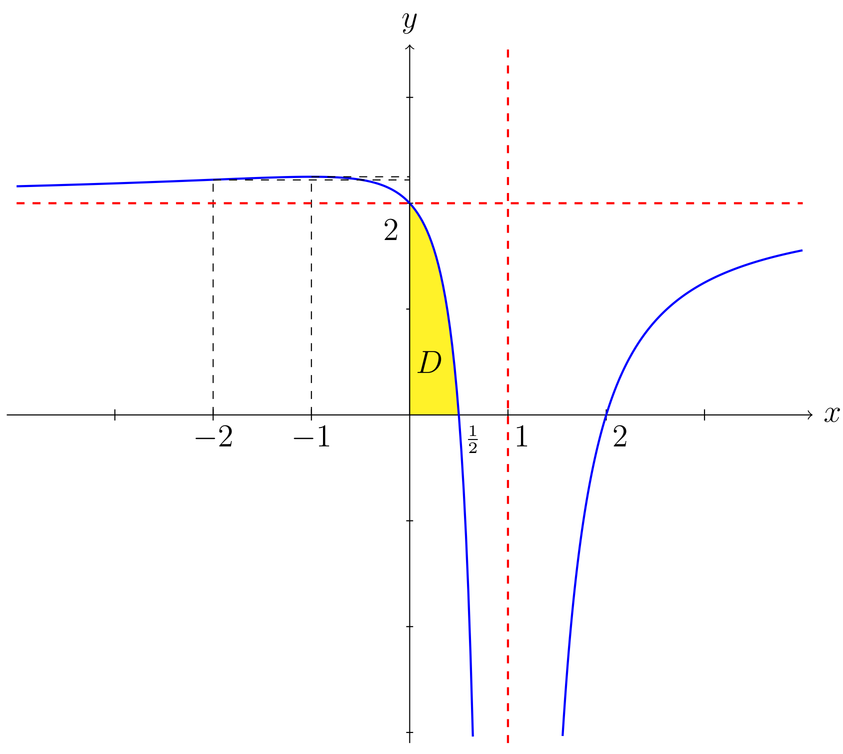
Ker je $(x-1)^2 > 0$ za vsak $x \in D_f$, je predznak odvoda enak predznaku izraza $\frac{x+1}{x-1}$. Ker lahko neenačbo $f'(x) > 0$ prepišemo v neenačbo $\frac{x+1}{x-1} > 0$, katere rešitev je območje $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, funkcija na tem območju raste. Ker je $f'(x) < 0$ na intervalu $(-1, 1)$, funkcija na njem pada. Funkcija ima stacionarno točko $x = -1$, $f(-1) = \frac{9}{4}$, v kateri je lokalni maksimum.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2(x-1-3x-3)}{(x-1)^6} \\ &= \frac{(x-1)^2(x-1-3x-3)}{(x-1)^6} = \frac{-2x-4}{(x-1)^4} = \frac{-2(x+2)}{(x-1)^4}. \end{aligned}$$

Ker je $(x-1)^4 > 0$ za vsak $x \in D_f$, je $f''(x) > 0$, kadar velja neenakost $x + 2 < 0$. Funkcija je torej konveksna na intervalu $(-\infty, -2)$ in konkavna na območju $(-2, 1) \cup (1, \infty)$. Točka $x = -2$, $f(-2) = \frac{20}{9}$, je prevoj dane funkcije.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



(b) Ploščina omejenega lika D, ki ga določajo graf funkcije in koordinatni osi je enaka

$$p(D) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{x}{(x-1)^2}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x-1)^2}\,dx.$$

V drugi integral uvedemo novo spremenljivko $t = x - 1$, torej $dt = dx$ in $x = t + 1$. Zaradi uvedbe nove spremenljivke moramo ustrezno spremeniti tudi meje integrala. Torej

$$\begin{aligned} p(D) &= 2x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{t+1}{t^2}\,dt = 1 - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2}\,dt - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= 1 - \ln|t|\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{t}\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = 1 - \ln\frac{1}{2} - 2 + 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

94. (1. izpit, 28.1.2016) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x\sqrt{1-x}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti in konveksnosti. Narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije in abscisna os.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker izraz $1 - x$ nastopa pod znakom kvadratnega korena, mora biti $1 - x \geq 0$. Torej je $D_f = (-\infty, 1]$.
- Ničle: Ko rešimo enačbo $f(x) = 0$, dobimo ničle dane funkcije: $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: V točki $x = 1$ ima dana funkcija ničlo, zato moramo samo še določiti obnašanje funkcije, ko $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{1-x} = -\infty.$$

- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:

$$f'(x) = \sqrt{1-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

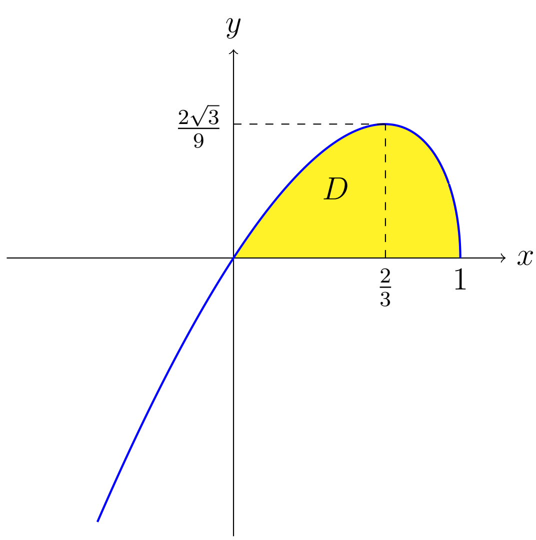
Ker je $\sqrt{1-x} > 0$ na $(-\infty, 1)$, ima $f'(x)$ enak predznak kot izraz $2-3x$. Torej bo $f'(x) > 0$, če bo $2-3x > 0$. Ker je rešitev neenačbe enaka $(-\infty, \frac{2}{3})$, funkcija f na tem območju raste in pada na intervalu $(\frac{2}{3}, 1)$. Funkcija ima eno stacionarno točko $x = \frac{2}{3}$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, v kateri je lokalni maksimum.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{-3\sqrt{1-x}-(2-3x)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-6(1-x)+2-3x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}\right) = \frac{3x-4}{4(1-x)\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

Ker je izraz $(1-x)\sqrt{1-x}$ na D_f pozitiven, je predznak $f''(x)$ odvisen od predznaka izraza $3x-4$, ki je na celem D_f negativen. Torej je funkcija f konkavna na celotnem D_f in nima prevojev.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



(b) Ploščina omejenega lika D, ki ga omejujeta graf funkcije in abscisna os, je enaka

$$p(D) = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx.$$

V integral uvedemo novo spremenljivko $t = \sqrt{1-x}$ oz. $t^2 = 1 - x$, torej $2tdt = -dx$ in $x = 1 - t^2$. Zaradi uvedbe nove spremenljivke moramo ustrezno spremeniti tudi meje integrala. Torej

$$p(D) = \int_1^0 (1-t^2)t(-2t)\,dt = 2\int_0^1 \left(t^2 - t^4\right)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2(5-3)}{15} = \frac{4}{15}.$$

95. (3. izpit, 13.6.2016) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = xe^{1-2x^2}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

(b) Če obstaja, izračunajte ploščino neomejenega lika D, ki leži v prvem kvadrantu, in ga omejujeta graf funkcije in abscisna os.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker je funkcija e^x definirana za vse realne x, je $D_f = \mathbb{R}$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ker je $e^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, ima funkcija ničlo $x = 0$.
- Sodost/lihost: Ker je

$$f(-x) = (-x)e^{1-2(-x)^2} = -xe^{1-2x^2} = -f(x),$$

je funkcija f liha.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Ker je funkcija liha, je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ko gre $x \to \infty$, gre $1 - 2x^2 \to -\infty$ in $e^{1-2x^2} \to 0$, torej imamo nedoločenost oblike $\infty \cdot 0$, ki jo prepišemo v nedoločenost oblike $\frac{\infty}{\infty}$, da lahko uporabimo l'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x^2-1}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4xe^{x^2-1}} = 0.$$

- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:

$$f'(x) = e^{1-2x^2} + xe^{1-2x^2}(-4x) = (1-4x^2)e^{1-2x^2} = (1-2x)(1+2x)e^{1-2x^2}.$$

Ker je $e^{1-2x^2} > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je predznak $f'(x)$ enak predznaku izraza $(1-2x)(1+2x)$. Če je $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, je torej $f'(x) > 0$ in zato funkcija na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ raste. Če je $x < -\frac{1}{2}$ ali $x > \frac{1}{2}$, je $f'(x) < 0$ in zato funkcija na območju $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ pada. Rešitvi enačbe $f'(x) = 0$ sta stacionarni točki $x_1 = -\frac{1}{2}$ in $x_2 = \frac{1}{2}$, $f(x_1) = -f(x_2) = \frac{\sqrt{e}}{2}$. V x_1 funkcija doseže lokalni minimum, v x_2 pa lokalni maksimum.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

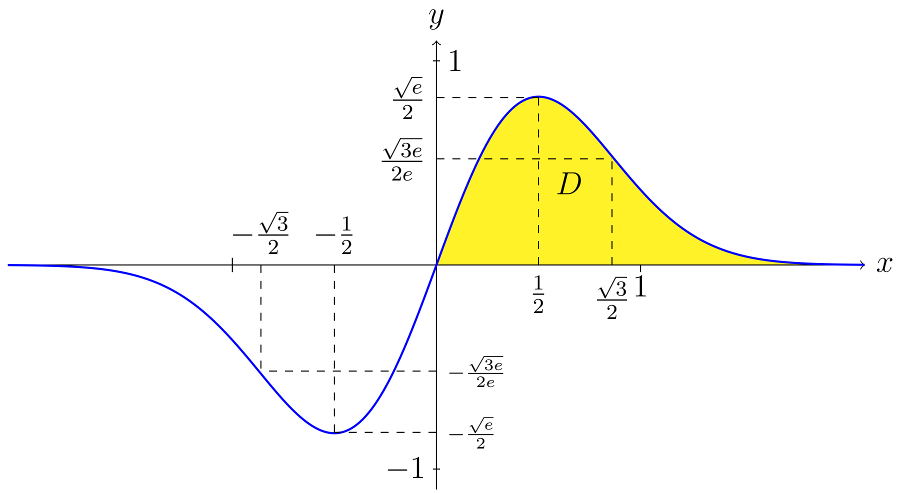
$$\begin{aligned} f''(x) &= -8xe^{1-2x^2} + (1-4x^2)e^{1-2x^2}(-4x) = -4x(2+1-4x^2)e^{1-2x^2} \\ &= -4x(3-4x^2)e^{1-2x^2} = 16x\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)e^{1-2x^2} \\ &= 16x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{1-2x^2}. \end{aligned}$$

Ker je $e^{1-2x^2} > 0$ za $x \in D_f$, so $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = 0$ in $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ kandidati za prevoje. Oglejmo si intervale, na katerih ima $f''(x)$ isti predznak.

  - Za $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ je $f''(x) < 0$ in zato je f na tem intervalu konkavna.
  - Za $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ je $f''(x) > 0$ in zato je f na tem intervalu konveksna.
  - Za $x \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ je $f''(x) < 0$ in zato je f na tem intervalu konkavna.
  - Za $x \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty)$ je $f''(x) > 0$ in zato je f na tem intervalu konveksna.

Torej ima funkcija f v točkah $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = 0$ in $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ prevoje. Vrednosti funkcije v teh točkah so $f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3e}}{2e}$, $f(0) = 0$ in $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3e}}{2e}$.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



Opomba: Ker je funkcija f liha, bi lahko računali stacionarne točke, intervale monotonosti, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti ter narisali graf funkcijele le za $x \geq 0$. Zaradi lihosti funkcije f je del grafa funkcije f za $x < 0$ določen z delom grafa funkcije f za $x > 0$ (ta del grafa moramo prezrcaliti preko koordinatnega izhodišča). Iz celotnega grafa bi dobili podatke o ekstremih, intervalih naraščanja in padanja, prevojih ter intervalih konveksnosti in konkavnosti funkcije f tudi za $x < 0$.

(b) Najprej izračunajmo nedoločeni integral. Uvedemo novo spremenljivko $t = 1 - 2x^2$, torej $dt = -4xdx$ in $xdx = -\frac{dt}{4}$.

$$\int xe^{1-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int e^t\,dt = -\frac{e^t}{4} + C = -\frac{e^{1-2x^2}}{4} + C.$$

Ploščina lika D obstaja, če konvergira posplošeni integral

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty xe^{1-2x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b xe^{1-2x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{1-2x^2}}{4}\right)\Bigg|_0^b \\ &= -\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left(e^{1-2b^2} - e\right) = \frac{e}{4}. \end{aligned}$$

Zadnja enakost velja, saj ko gre $b \to \infty$, gre $1 - 2b^2 \to -\infty$ in $e^{1-2b^2} \to 0$. Ploščina lika D je torej enaka $\frac{e}{4}$.

96. (4. izpit, 5.9.2016) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \arctan \frac{x^2-1}{2x}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme in intervale monotonosti. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte ploščino lika

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x \leq \sqrt{3},\ 0 \leq y \leq \arctan \frac{x^2-1}{2x}\right\}.$$

Namig: Uporabite metodo per partes in uvedite novo spremenljivko.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker je funkcija $\arctan x$ povsod definirana, je definicijsko območje naše funkcije enako definicijskemu območju racionalne funkcije $\frac{x^2-1}{2x}$. Torej $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Ničle: Rešimo enačbo $f(x) = 0$. Ker je $\arctan x = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$, je enačba $f(x) = 0$ ekvivalentna enačbi $\frac{x^2-1}{2x} = 0$, ta pa je ekvivalentna enačbi $x^2 - 1 = 0$. Tako dobimo dve ničli $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$.
- Sodost/lihost: Ker je

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arctan \frac{(-x)^2-1}{2(-x)} = \arctan\left(-\frac{x^2-1}{2x}\right) \\ &= -\arctan \frac{x^2-1}{2x} = -f(x), \end{aligned}$$

je funkcija f liha.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Ker je funkcija liha, je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = -\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$. Ko gre $x \to \infty$, gre $\frac{x^2-1}{2x} \to \infty$ in $\arctan \frac{x^2-1}{2x} \to \frac{\pi}{2}$. Ko gre $x \searrow 0$ gre $\frac{x^2-1}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} \to -\infty$ in $\arctan \frac{x^2-1}{2x} \to -\frac{\pi}{2}$.
- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo

stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\cdot\frac{2x2x-(x^2-1)2}{(2x)^2} = \frac{2(2x^2-x^2+1)}{\frac{4x^2+(x^2-1)^2}{4x^2}\cdot 4x^2} \\ &= \frac{2(x^2+1)}{4x^2+(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2+1)}{x^4+2x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

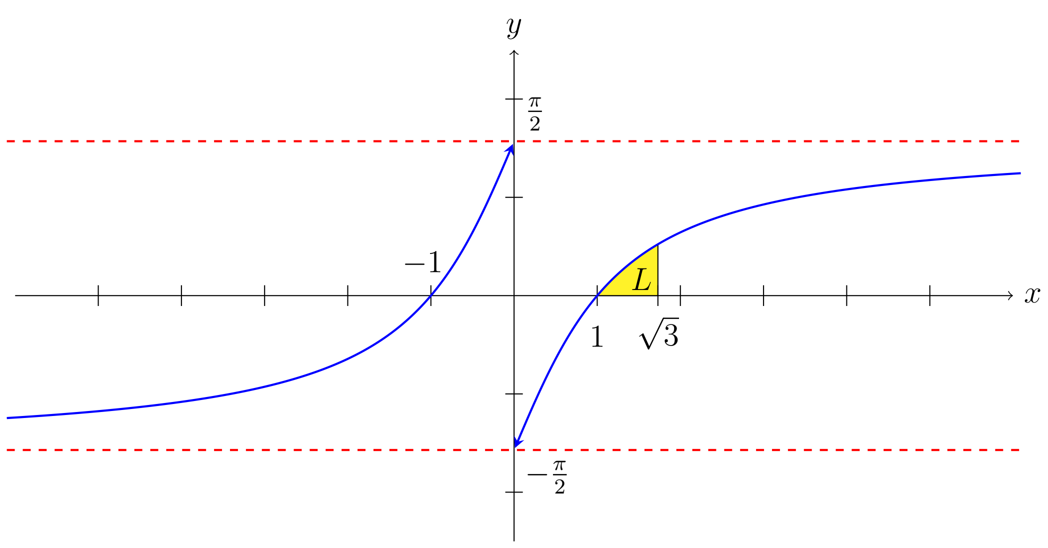
Ker je $x^2+1>0$ za vsak $x\in D_f$, je tudi $f'(x)>0$. To pomeni, da funkcija narašča na D_f. Ker je $f'(x)\neq 0$ funkcija nima stacionarnih točk.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji. Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$f''(x) = \left(\frac{2}{x^2+1}\right)' = 2\left((x^2+1)^{-1}\right)' = -2(x^2+1)^{-2}2x = -4\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Ker je $f''(x)=0$ natanko tedaj, ko je $x=0$ in $0\notin D_f$, funkcija nima prevojev. Ker je $(x^2+1)^2>0$ za $x\in D_f$, je $f''(x)>0$ natanko tedaj, ko je $x<0$. Funkcija f je torej konveksna na intervalu $(-\infty,0)$ in konkavna na $(0,\infty)$.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije:



Opomba: Ker je funkcija f liha, bi lahko računali stacionarne točke, intervale monotonosti, prevoje ter intervale konveksnosti in konkavnosti le za $x\geq 0$. Z upoštevanjem teh podatkov bi lahko narisali graf funkcije f za $x\geq 0$. Zaradi lihosti funkcije f je del grafa funkcije f za $x<0$ določen z delom grafa funkcije

f za $x > 0$ (ta del grafa moramo prezrcaliti preko koordinatnega izhodišča). Iz celotnega grafa dobimo podatke o ekstremih, intervalih naraščanja in padanja, prevojih ter intervalih konveksnosti in konkavnosti funkcije f tudi za $x < 0$.

(b) Uporabimo metodo *per partes.* Izberimo $u = \arctan \frac{x^2-1}{2x}$ in $dv = dx$ ter izračunajmo $du = \frac{2}{x^2+1} dx$ in $v = x$.

$$\int \arctan \frac{x^2-1}{2x}\, dx = x \arctan \frac{x^2-1}{2x} - \int \frac{2x}{x^2+1} dx.$$

V preostali integral uvedemo novo spremenljivko $t = x^2 + 1$, za katero velja $dt = 2x\, dx$:

$$\begin{aligned} x \arctan \frac{x^2-1}{2x} - \int \frac{2x}{x^2+1} dx &= x \arctan \frac{x^2-1}{2x} - \int \frac{dt}{t} \\ &= x \arctan \frac{x^2-1}{2x} - \ln|t| + C \\ &= x \arctan \frac{x^2-1}{2x} - \ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

Ploščina lika L je tako enaka

$$\begin{aligned} p(L) &= \int_1^{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{2x}\, dx = \left(x \arctan \frac{x^2-1}{2x} - \ln(x^2+1) + C \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} - \ln 4 - \arctan 0 + \ln 2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \ln 2. \end{aligned}$$

Uporabili smo dejstvo, da je $\ln 2 - \ln 4 = \ln \frac{2}{4} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$.

97. (2. kolokvij, 18.1.2017) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Rešitev:

(a)
- Definicijsko območje: Ker sta funkciji x in $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ povsod definirani, je definicijsko območje naše funkcije $D_f = \mathbb{R}$.
- Ničle: Če zapišemo $f(x) = \frac{x}{e^x}$ vidimo, da je enačba $f(x) = 0$ ekvivalentna $x = 0$.
- Sodost/lihost. Ker je

$$f(-x) = (-x)e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x),$$

  je funkcija f liha.
- Obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja: Ker je funkcija liha, je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ko gre $x \to \infty$, gre $\frac{x}{e^x} \to 0$.
- Intervali monotonosti ter ekstremi: Najprej izračunajmo odvod in poiščimo stacionarne točke:

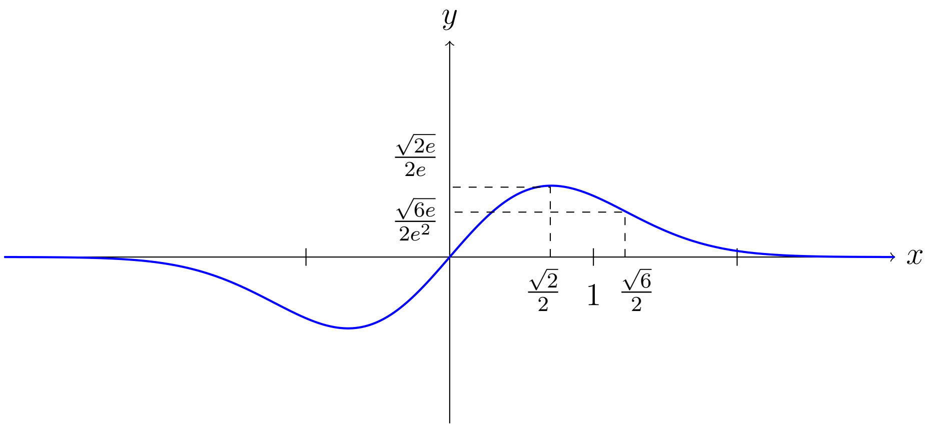
$$f'(x) = \frac{e^{x^2} - xe^{x^2}2x}{e^{2x^2}} = \frac{e^{x^2}(1-2x^2)}{e^{2x^2}} = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}.$$

  Stacionarne točke so torej rešitve enačbe $\frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0$. Ker ima enačba dve rešitvi $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ima funkcija dve stacionarni točki. Ker je $e^{x^2} > 0$ za vsak $x \in D_f$, je predznak $f'(x)$ enak predznaku $1-2x^2$. Torej je $f'(x) > 0$ natanko tedaj, ko je $1-2x^2 > 0$, to pa je pri $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Na tem intervalu funkcija narašča. Funkcija pada za $x \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Funkcija doseže lokalni minimum v $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2e}}{2e}$, lokalni maksimum pa doseže v $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2e}$.
- Intervali konveksnosti in konkavnosti ter prevoji: Najprej izračunajmo drugi odvod in poiščimo njegove ničle, ki so kandidati za prevoje funkcije:

$$f''(x) = \frac{-4xe^{x^2} - (1-2x^2)e^{x^2}2x}{e^{2x^2}} = -2e^{x^2} \cdot \frac{x(3-2x^2)}{e^{2x^2}} = -2 \cdot \frac{x(3-2x^2)}{e^{x^2}}.$$

  Rešitve enačbe $f''(x) = 0$ so $x = 0$ in $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Ker je $e^{x^2} > 0$ za $x \in D_f$, je $f''(x) > 0$ natanko tedaj, ko je $3x - 2x^3 < 0$. Funkcija $3x - 2x^3$ je zvezna in menja predznak le v ničlah, ki smo jih izračunali že prej. Ker gre za polinom tretje stopnje z negativnim vodilnim koeficientom velja $3x-2x^3<0$ na območju $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\infty\right)$. Funkcija f je torej konveksna na območju $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\infty\right)$ in konkavna na $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. Funkcija ima prevoje v $x=0$, $f(0)=0$ in $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, $f\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6e}}{2e^2}$.

- Na podlagi dobljenih podatkov skicirajmo še graf funkcije (zaradi lepše slike sta označena le lokalni maksimum in prevoj za $x>0$):



Opomba: Ker je funkcija f liha, bi lahko računali stacionarne točke, intervale monotonosti, prevoje ter intervale konveksnosti in konkavnosti le za $x\geq 0$. Z upoštevanjem teh podatkov bi lahko narisali graf funkcije f za $x\geq 0$. Zaradi lihosti funkcije f je del grafa funkcije f za $x<0$ določen z delom grafa funkcije f za $x>0$ (ta del grafa moramo prezrcaliti preko koordinatnega izhodišča). Iz celotnega grafa dobimo podatke o ekstremih, intervalih naraščanja in padanja, prevojih ter intervalih konveksnosti in konkavnosti funkcije f tudi za $x<0$.

(b) Uvedimo novo spremenljivko $t=-x^2$, za katero velja $dt=-2x\,dx$ oziroma $x\,dx=-\frac{dt}{2}$. Nova spodnja meja je 0, nova zgornja meja pa -1.

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\int_0^{-1}e^t\frac{-dt}{2}=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}e^t\,dt=-\frac{1}{2}e^t\Big|_0^{-1}=-\frac{1}{2}\left(e^{-1}-1\right)=\frac{e-1}{2e}.$$

98. (4. izpit, 28.8.2017) Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$

(a) Določite naravno definicijsko območje funkcije. Ali je funkcija soda ali liha ali nič od tega? Poiščite njene ničle, ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti ter skicirajte njen graf.

(b) Izračunajte $I = \int\limits_0^2 f(x)\,dx$. Kakšen je geometrijski pomen števila I?

Rešitev: Za rešitve te naloge poglejte rešitve naloge 88.

Razporeditev nalog po kolokvijih in izpitih

Šolsko leto 2013/14:

1. kolokvij, 25.11.2013:

1. Poiščite vse vektorje $\vec{x}$, ki zadoščajo enačbi $|\vec{a} \times \vec{x}| = 1$, kjer je $\vec{a}$ dan vektor. Ali za kakšen vektor $\vec{a}$ enačba nima rešitve?

2. Določite naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \cos\left(\frac{x(x+4)}{(x-1)(x-3)}\right) + \ln(1 - |2 - |x-1||).$$

3. Naj bodo točke $A(1,2,0)$, $B(3,1,-4)$, $C(2,0,1)$ in $D(0,2,1)$ oglišča tetraedra $ABCD$.

   (a) Izračunajte prostornino tristrane piramide in dolžino višine na ploskev skozi točke A, C in D.

   (b) Določite enačbo premice p skozi točki A in C.

   (c) Poiščite presečišče premice p in premice q: $x = 1 - y = \frac{z+4}{2}$.

4. (a) Pokažite s popolno indukcijo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{k=1}^{n}(2+3k) = \frac{3n^2+7n}{2}.$$

   (b) Izračunajte limito

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(2+3k)}{n^2+2n}$$

   in določite, kateri členi ležijo izven ε-okolice limite L s polmerom $\varepsilon = 0.01$.

Poglejte naloge z rešitvami: 18, 1, 32 in 64.

2. kolokvij, 13.1.2014:

1. Izračunajte

$$\int_0^1 (1+e^{2x})\sqrt{e^{2x}-1}\,dx.$$

2. Določite parametra a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x<0 \\ a, & x=0 \\ \frac{b\sin x^2}{1+2x-e^{2x}}, & x>0 \end{cases}$$

   povsod zvezna.

3. Skicirajte graf funkcije $f\colon [0,1] \to [1,2]$, za katero velja naslednje:

   (1) funkcija f je bijekcija;

   (2) $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in [0,1]$;

   (3) $f''(x) \leq 0$ za vse $x \in [0,1]$.

   Poiščite funkcijski predpis kake funkcije s temi lastnostmi.

4. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \arctan\frac{x-1}{x+1}.$$

   Določite definicijsko območje, ničle, začetno vrednost, intervale monotonosti, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti, prevoje dane funkcije. Raziščite obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja in funkcijo narišite.

5. Obravnavajte sistem enačb glede na parameter a in zapišite vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2, \\ x & + & 5y & + & 7z & = & 6, \\ 3x & + & 5y & + & (a^2-3)z & = & a+6. \end{array}$$

Poglejte naloge z rešitvami: 81, 67, 72, 73 in 37.

1. izpit, 23.1.2014:

1. Določite naravno definicijsko območje funkcije
$$f(x) = \frac{(x-7)\sin x}{(x+2)x} + \ln(|x^2 - 5x| - 6).$$

2. Določite vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 8 & -14 & -4 \\ 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Ali se matriko A da diagonalizirati? Odgovor utemeljite.

3. Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = (\ln x)^2.$$
   (a) Določite definicijsko območje, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

   (c) Določite ploščino lika L, ki ga omejujejo graf funkcije, tangenta v točki $(e, 1)$ in abscisna os.

4. Dani sta premici
$$p\colon x - 4 = \frac{3-y}{2} = \frac{z+1}{c} \quad \text{in} \quad q\colon \frac{5-x}{2} = y - 7 = \frac{z+11}{2}.$$
   (a) Določite c tako, da bosta smerna vektorja premic pravokotna.

   (b) Pokažite, da se za tako dobljeni c premici sekata in poiščite presečišče.

   (c) Poiščite ravnini, ki sta vzporedni premicama p in q ter sta od njiju oddaljeni za 3 enote.

Poglejte naloge z rešitvami: 2, 38, 86 in 23.

2. izpit, 7.2.2014:

1. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Rešite matrično enačbo $AX = B^T + 2X$.

2. Pokažite, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ konvergentna.

3. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x.$$

   (a) Določite definicijsko območje, ničle, začetno vrednost, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

   (c) Izračunajte $I = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$. Kakšen je geometrijski pomen števila I?

4. Naj bodo $A(2, -1, 0)$, $B(6, -1, 4)$ in $C(5, -3, 1)$ oglišča trikotnika.

   (a) Določite ploščino trikotnika ABC.

   (b) Poiščite enačbo ravnine Σ, v kateri leži trikotnik ABC.

   (c) Napišite enačbo premice p skozi točki A in B.

   (d) Poiščite pravokotno projekcijo točke C na premico p.

Poglejte naloge z rešitvami: 39, 59, 87 in 33.

3. izpit, 9.6.2014:

1. Dani sta premici

$$p\colon x = 3 + t,\ y = -3,\ z = -1 - 2t \quad \text{in} \quad q\colon \frac{x+2}{2} = 1 - y = 3 - z.$$

   (a) Poiščite razdaljo med njima.

   (b) Določite pravokotno projekcijo točke $A(4, 3, 7)$ na premico p.

2. Naj bo A množica vseh kompleksnih števil, ki zadoščajo enačbi

$$2|z| = |z - 3i|.$$

   Skicirajte jo v kompleksni ravnini. Pokažite, da množica A vsebuje natanko dve realni števili in poiščite razdaljo med njima.

3. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$

   (a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost oz. lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije in pozitivna abscisna os.

4. Dane imamo tri enačbe ravnin:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0, \\ x & + & 2y & + & \alpha z & = & -1, \\ 2x & + & \alpha y & + & 4z & = & 2. \end{array}$$

   (a) Za katere vrednosti parametra α se ravnine ne sekajo?

   (b) Za katere vrednosti parametra α se sekajo v premici? Določite njeno enačbo.

   (c) Poiščite presečišče ravnin za $\alpha = 2$.

Poglejte naloge z rešitvami: 24, 10, 88 in 25.

4. izpit, 1.9.2014:

1. (a) Izračunajte kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, če je

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y},\ |\overrightarrow{x}| = 2|\overrightarrow{y}| \text{ in } \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}.$$

   (b) Izrazite ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, z dolžino vektorja $\overrightarrow{y}$.

2. Določite parameter a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos 4x}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

   zvezna.

3. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^2 + 1}.$$

   (a) Določite definicijsko območje, ničle, asimptoto, ekstreme, intervale monotonosti in narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

   (c) Izračunajte $I = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx$. Kakšen je geometrijski pomen števila I?

4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Rešite matrično enačbo $AX = A^T + 4X$.

Poglejte naloge z rešitvami: 19, 68, 89 in 40.

Šolsko leto 2014/15:

1. kolokvij, 1.12.2014:

1. Z matematično indukcijo pokažite, da je izraz oblike $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ deljiv z 9 za vsak $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

2. Določite naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sin\left(\frac{x(x-1)(x+7)}{x+1}\right) + \ln(|x^2-4| - 3x).$$

3. Premici, določeni z enačbama

$$p\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{in} \quad q\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5},$$

   sta mimobežnici.

   (a) Določite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T_0(-4,-5,3)$ in premico p.

   (b) Izračunajte koordinate točke T_1, v kateri premica q prebada ravnino iz (a).

   (c) Poiščite presečišče T_2 premice p in premice skozi točki T_0 in T_1, če obstaja.

4. Izračunajte matriko X, ki zadošča matrični enačbi $AXA = 4A^T$, pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poglejte naloge z rešitvami: 8, 3, 26 in 41.

2. kolokvij, 19.1.2015:

1. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2+\frac{a_n}{5}$, $n \geq 1$. Utemeljite konvergenco zaporedja in izračunajte njegovo limito.

2. Pokažite, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{n^2(n+1)}$$
zadošča pogojem Leibnizovega izreka. Izračunajte njeno tretjo delno vsoto s_3 in ocenite za koliko se s_3 največ razlikuje od prave vsote vrste. Pokažite še, da vrsta ni absolutno konvergentna.

3. Določite konstanti α in β tako, da bo funkcija
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi \\ \alpha x + \beta, & x > \pi \end{cases}$$
v točki $x = \pi$ odvedljiva.

4. Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = e^{\frac{2-x}{x}}.$$
Določite definicijsko območje, ničle, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite obnašanje funkcije na krajiščih definicijskega območja in funkcijo narišite.

Poglejte naloge z rešitvami: 55, 60, 74 in 75.

1. izpit, 29.1.2015:

1. Poiščite vse lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

   in pripadajoče lastne vektorje. Ali se matriko A da diagonalizirati? Odgovor utemeljite.

2. Dan je funkcijski predpis $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$.

   (a) Določite definicijsko območje, ničle, obnašanje funkcije na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte ploščino omejenega lika D, ki ga določata graf funkcije f in abscisna os.

3. Dana je vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t+4}\right)^n.$$

   (a) Utemeljite, da je za $t = -1$ vrsta konvergentna in izračunajte njeno vsoto.

   (b) Za katere vrednosti t je vrsta konvergentna?

4. Določite množico tistih kompleksnih števil, za katere velja

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 4.$$

   Narišite to množico v kompleksni ravnini.

Poglejte naloge z rešitvami: 42, 90, 61 in 11.

2. izpit, 12.2.2015:

1. Naj bo $a_n = \frac{3+2n}{n^2}$, $n \geq 1$.

   (a) Določite limito zaporedja $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Kateri členi ležijo izven okolice $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ limite a, če je $\varepsilon = 0.25$?

   (b) S primerjalnim kriterijem pokažite, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ni konvergentna.

2. Določite število β tako, da bo imel sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ \beta x & + & y & - & 2z & = & 2+\beta \end{array}$$

   neskončno mnogo rešitev in zapišite množico rešitev.

3. Za funkcijo $f(x) = (x-1)^2 e^x$

   (a) določite največjo in najmanjšo vrednost na intervalu $[-2, 2]$ in točki, v katerih sta doseženi;

   (b) izračunajte $\int_0^2 f(x)\,dx$ in utemeljite, ali je vrednost integrala enaka ploščini lika, ki ga graf funkcije f oklepa z osjo x na intervalu $[0, 2]$.

4. Naj bodo $A(1,1,2)$, $B(1,5,2)$, $C(2,4,5)$ in D oglišča trapeza $ABCD$ za katerega velja $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Naj bo točka E razpolovišče daljice BC, točka F razpolovišče daljice DC in S presečišče daljic AC in EF. Označimo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$.

   (a) Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

   (b) Določite ploščino trikotnika ABS.

   (c) Določite enačbo ravnine, v kateri leži trapez.

Poglejte naloge z rešitvami: 65, 43, 91 in 34.

3. izpit, 15.6.2015:

1. Poiščite in v kompleksni ravnini narišite točke, za katere velja

$$|z-3i| = 2|z| \text{ in } \mathrm{Im}(z) = -2.$$

2. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \ln(x^2+1).$$

   (a) Določite definicijsko območje, sodost, lihost, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte $\int f(x)dx$.

   (c) Določite ploščino lika D, ki ga omejujeta graf funkcije in premica z enačbo $y = \ln 2$.

3. Z uporabo l'Hospitalovega pravila izračunajte limito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

4. Določite premico q, ki vsebuje točko $T_0(3,-2,-4)$, je vzporedna ravnini Σ, katere enačba je

$$3x - 2y - 3z - 7 = 0,$$

   hkrati pa še seka premico p z enačbo

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

   Narišite dobro skico situacije.

Poglejte naloge z rešitvami: 12, 92, 76 in 27.

4. izpit, 31.8.2015:

1. Poiščite naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x - 1}} + \arcsin\left(\frac{x-2}{5}\right).$$

2. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = 2 - \frac{x}{(x-1)^2}.$$

   (a) Določite definicijsko območje, ničle, asimptoto, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte ploščino omejenega lika D, ki ga določajo graf funkcije in koordinatni osi.

3. Za zaporedje

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}, \ n \in \mathbb{N},$$

   z uporabo matematične indukcije preverite, da velja formula

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}$$

   in določite še limito zaporedja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Ugotovite, pri katerih vrednostih parametra β je naslednji sistem rešljiv in zapišite vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & -1 \\ 3x & & & - & 6z & = & 3+3\beta \\ 2x & - & \beta y & + & (\beta-4)z & = & 2 \end{array}$$

Poglejte naloge z rešitvami: 4, 93, 66 in 44.

Šolsko leto 2015/16:

1. kolokvij, 23.11.2015:

1. S pomočjo matematične indukcije pokažite, da za vsako naravno število n velja
$$2 + 10 + 24 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1).$$

2. Dani sta premici
$$p\colon \overrightarrow{r} = \lambda(-2,0,1),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \text{ in } q\colon \overrightarrow{r} = (1,1,-1) + \mu(0,2,-1),\ \mu \in \mathbb{R}.$$
   (a) Pokažite, da se premici p in q sekata.
   (b) Poiščite enačbo ravnine Π, ki vsebuje premici p in q.
   (c) Poiščite točko T_0 na ravnini Π, ki je najbližja točki $T(5,-3,5)$ in določite razdaljo točke T od ravnine Π.

3. Dani sta kompleksni števili $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ in $z_2 = 1 + i$.
   (a) Izračunajte $\frac{z_1 - z_2}{z_2}$.
   (b) Zapišite z_1 in z_2 v polarni obliki.
   (c) Izračunajte $\frac{z_1^{12}}{z_2^{12}}$.

4. Za funkcijo
$$f(x) = \ln(\arccos(2x))$$
   (a) določite definicijsko območje in zalogo vrednosti;
   (b) preverite, da je funkcija bijektivna in zapišite predpis njej inverzne funkcije f^{-1};
   (c) poiščite edino ničlo funkcije f^{-1}.

Poglejte naloge z rešitvami: 9, 28, 13 in 5.

2. kolokvij, 18.1.2016:

1. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2a_n^2+3}{7},\ n \geq 1.$$

   Pokažite, da je zaporedje monotono in omejeno. Utemeljite konvergenco zaporedja in poiščite njegovo limito.

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poiščite vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

   (b) Ali matriko A lahko diagonaliziramo? Če lahko, poiščite tako obrnljivo matriko P in diagonalno matriko D, da velja $A = PDP^{-1}$.

   (c) Izračunajte A^{2016}.

3. Izračunajte limiti

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$.

4. Določite Taylorjev polinom $T_2(x;0)$ za funkcijo $f(x) = \arctan x$ glede na točko 0. Ocenite napako približka $f(x) \approx T_2(x;0)$, ki bo veljavna za $|x| \leq \frac{1}{10}$.

Poglejte naloge z rešitvami: 56, 45, 69 in 77.

1. izpit, 28.1.2016:

1. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Rešite matrično enačbo $AX = B^T + X$.

2. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x\sqrt{1-x}.$$

   (a) Določite definicijsko območje, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti in konveksnosti. Narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije in abscisna os.

3. V paralelogramu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Naj bo točka L razpolovišče diagonale AC in točka M naj deli stranico BC v razmerju $2:1$.

   (a) Naj bo S presečišče daljic AM in BL. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

   (b) Naj bo $|\overrightarrow{b}| = 1$, $|\overrightarrow{a}| = 2$ in $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi/3$. Poiščite dolžino vektorja $\overrightarrow{LM}$.

4. Določite vsa števila x, za katera velja neenakost

$$\big||x| - 2\big| < \frac{1}{4}\,|x+2|$$

   in narišite grafa na obeh straneh neenačaja v $\mathbb{R}^2$. 'Popravite' štirico v neenačbi tako, da bo množica rešitev natanko interval $(1, 4)$.

Poglejte naloge z rešitvami: 46, 94, 20 in 6.

2. izpit, 11.2.2016:

1. Izračunajte ploščino lika, ki je omejen z osjo x in grafom funkcije

$$f(x) = x^3 \cos x^2$$

ter vsebuje točko $\left(1, \frac{1}{10}\right)$.

2. Določite množico vseh kompleksnih števil, za katera velja enakost

$$|z - 1| = |2z + 1|$$

in jo narišite v kompleksni ravnini.

3. Poiščite enačbo tangente na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x+3}{3x+5}$$

v točki $x_0 = -1$. V kateri točki ta tangenta seka abscisno os? Ali še kakšna tangenta grafa funkcije g seka x-os v isti točki?

4. Podani sta ravnini

$$\Sigma_1 \colon x + y + z = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma_2 \colon 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} + 4\mathrm{z} = 1.$$

   (a) Pokažite, da se ravnini Σ_1 in Σ_2 sekata v premici in poiščite njeno enačbo.

   (b) Poiščite vse vrednosti parametra α, za katere ravnine Σ_1, Σ_2 in

$$\Sigma_3 \colon x + y + \alpha^2 z = \alpha$$

   nimajo nobene skupne točke.

Poglejte naloge z rešitvami: 82, 14, 78 in 29.

3. izpit, 13.6.2016:

1. Obravnavajte in rešite sistem naslednjih enačb v odvisnosti od parametra a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & az & = & 2 \\ x & + & ay & + & z & = & a+1 \end{array}$$

2. Poiščite vse rešitve enačbe

$$\mathrm{Re}(z+iz)+z\bar{z}=0, \quad z\in\mathbb{C},$$

   in jih narišite v kompleksni ravnini. Naredite isto še za enačbo $\mathrm{Im}(2z-iz)=1$. Določite vsa kompleksna števila, ki zadoščajo obema enačbama.

3. Dan je funkcijski predpis

$$f(x)=xe^{1-2x^2}.$$

   (a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

   (b) Če obstaja, izračunajte ploščino neomejenega lika D, ki leži v prvem kvadrantu, in ga omejujeta graf funkcije in abscisna os.

4. Določite parametra a in b tako, da bo funkcija

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}, & -1<x<0 \\ ax+b, & 0\le x\le 1 \\ \arctan\frac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$$

   zvezna povsod na svojem definicijskem območju.

Poglejte naloge z rešitvami: 47, 15, 95 in 70.

4. izpit, 5.9.2016:

1. Poiščite vse vrednosti parametra a, za katere je dana determinanta enaka 2:
$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & a & 3 \\ -1 & 1 & 2a-2 & -a \end{vmatrix}$$

2. V paralelogramu $ABCD$ naj bo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Naj bo točka L razpolovišče diagonale AC in točka M naj deli stranico BC v razmerju $2:1$.
   (a) Poiščite razmerje med ploščino trikotnika BML in ploščino paralelograma $ABCD$.
   (b) Naj bo S presečišče daljic AM in BL. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
   (c) Naj bo $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a}| = 2$ in $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Poiščite dolžino vektorja $\overrightarrow{LM}$.

3. Dano je zaporedje
$$a_n = \frac{6n^2+1}{1-2n^2}, \quad n \geq 1.$$
Pokažite, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno. Določite limito zaporedja. Ugotovite, od katerega člena naprej ležijo členi zaporedja v intervalu s središčem v limiti in polmerom $\varepsilon = 0.01$.

4. Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = \arctan \frac{x^2-1}{2x}.$$
   (a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme in intervale monotonosti. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.
   (b) Izračunajte ploščino lika
$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, 1 \leq x \leq \sqrt{3},\, 0 \leq y \leq \arctan \frac{x^2-1}{2x}\right\}.$$
Namig: Uporabite metodo per partes in uvedite novo spremenljivko.

Poglejte naloge z rešitvami: 48, 21, 57 in 96.

Šolsko leto 2016/17:

1. kolokvij, 5.12.2016:

1. Poiščite vsa kompleksna števila z, za katera velja:

$$\sqrt{2}\, z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{21} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Določite vrednost parametra a, da matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ a & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

   ne bo obrnljiva.

3. V paralelogramu $ABCD$ naj bo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Naj točka X deli stranico CD v razmerju $2:1$ in točka Y deli stranico AD v razmerju $1:2$.

   (a) Naj bo S presečišče daljic AX in BY. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) Naj bo $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ in $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Poiščite dolžino vektorja $\overrightarrow{YX}$ in ploščino trikotnika AXY.

4. Obravnavajte in rešite sistem naslednjih enačb v odvisnosti od parametra a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & (a+1)z & = & 2 \\ 2x & - & ay & + & 2(a+1)z & = & 2 \end{array}$$

Poglejte naloge z rešitvami: 16, 49, 22 in 50.

2. kolokvij, 18.1.2017:

1. Pokažite, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n^2}$$
zadošča pogojem Leibnizovega izreka. Izračunajte njeno tretjo delno vsoto s_3 in ocenite za koliko se s_3 največ razlikuje od prave vsote vrste. Pokažite še, da vrsta ni absolutno konvergentna.

2. Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = xe^{-x^2}.$$
   (a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

   (b) Izračunajte $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

3. Določite parametra a in b tako, da bo funkcija $f(x)$ povsod zvezna:
$$f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{x}{x+1}, & x < -1 \\ ax+b, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+2x}-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Poglejte naloge z rešitvami: 62, 97 in 71.

1. izpit, 23.1.2017:

1. Za rekurzivno podano zaporedje $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ pokažite, da je omejeno in monotono. Utemeljite konvergenco zaporedja in izračunajte njegovo limito.

2. Dani sta premica $p\colon \overrightarrow{r} = (2, 3, -4) + \lambda(-1, -2, 1)$ in točka $T(1, \frac{5}{2}, 0)$.

   (a) Napišite enačbo ravnine, ki gre skozi premico p in točko T.

   (b) Poiščite točko T_0 na premici p, ki je najbližja točki T in določite razdaljo točke T od premice p.

3. Izračunajte lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Poiščite kako obrnljivo matriko P in diagonalno matriko D, da bo $A = PDP^{-1}$. Z njihovo pomočjo izračunate A^{2017}.

4. Izračunajte ploščino lika, omejenega s krivuljami

$$y = \frac{2}{x},\ y = x + 1,\ y = 0 \text{ in } x = 3.$$

Poglejte naloge z rešitvami: 58, 30, 51 in 83.

2. izpit, 6.2.2017:

1. Obravnavajte in rešite sistem naslednjih enačb v odvisnosti od parametra a:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & (a+2)z & = & 5 \\ x & - & (a+2)y & & & = & 1 \end{array}$$

2. Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$
Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

3. Izračunajte
$$(a) \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty x e^{-2x}\, dx.$$

4. V paralelogramu $ABCD$ označimo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Točke X, Y, U in V naj zaporedoma ležijo na stranicah AB, BC, CD in DA tako, da velja $|\overrightarrow{AX}| : |\overrightarrow{XB}| = 1 : 2$, $|\overrightarrow{BY}| : |\overrightarrow{YC}| = 2 : 1$, točka U razpolavlja daljico CD in točka V razpolavlja daljico AD. Označimo z S presečišče daljic XU in YV.
   (a) Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.
   (b) Naj imajo točke A, B in D koordinate $A(2, 0, 0)$, $B(3, -2, 2)$ in $D(4, 1, 2)$. Pokažite, da je paralelogram romb. Poiščite tudi enačbo ravnine, v kateri leži ta paralelogram.

Poglejte naloge z rešitvami: 52, 79, 84 in 35.

3. izpit, 13.6.2017:

1. Rešite matrično enačbo $AX = 2X + B^T$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. V prostoru imamo ravnino $\Pi : x + y - 2z = 0$ ter premici

$$p : \overrightarrow{r} = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 1),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \text{in } q : x = y = -\frac{z}{2}.$$

   (a) Preverite, da premica p leži v ravnini Π.

   (b) Preverite, da je premica q pravokotna na ravnino Π.

   (c) Izračunajte razdaljo med premicama p in q.

3. Dana je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

   Ali konvergira? Ali konvergira absolutno? Odgovore utemeljite.

4. Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepajo abscisna os, graf funkcije $f(x) = \ln x$ ter tista tangenta na graf $f(x)$, ki poteka skozi točko $(e, 1)$.

5. Določite definicijsko območje realne funkcije, podane s predpisom $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$. Ali je funkcija soda ali liha ali nič od tega? Poiščite njene ničle, intervale naraščanja in padanja, konveksnosti in konkavnosti ter skicirajte njen graf. V katerih točkah definicijskega območja prvi in drugi odvod funkcije ne obstajata?

Poglejte naloge z rešitvami: 53, 31, 63, 85 in 80.

4. izpit, 28.8.2017:

1. Naj bo $ABCD$ trapez, kjer je $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{a}$. Naj bo točka E razpolovišče stranice BC in naj točka F deli stranico AD v razmerju $1 : 2$. Označimo z S presečišče daljic AE in FB. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.
   Zapišite enačbo ravnine, v kateri leži trapez, če so koordinate točk $A(0,0,0)$, $B(2,1,1)$ in $D(-1,2,0)$.

2. Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}.$$
   (a) Določite naravno definicijsko območje funkcije. Ali je funkcija soda ali liha ali nič od tega? Poiščite njene ničle, ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti ter skicirajte njen graf.
   (b) Izračunajte $I = \int_0^2 f(x)\,dx$. Kakšen je geometrijski pomen števila I?

3. Določite definicijsko območje funkcije
$$f(x) = \sqrt{|1-x| - x^2 + 1}\,.$$

4. Poiščite vsa kompleksna števila, ki zadoščajo enačbama
$$|z+1-2i| = |z-1| \quad \text{in} \quad 2\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z).$$

5. Rešite sistem enačb
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 5x & - & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1. \end{array}$$
   Kakšen je geometrijski pomen rešitve?

Poglejte naloge z rešitvami: 36, 98, 7, 17 in 54.

Literatura

[1] V. Lampret, *Matematika 1, prvi del, preslikave, števila in vektorski prostori*, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 2012.

[2] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Prvi del*, 6. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2001.

[3] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Drugi del*, 6. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1997.

[4] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 1, Naloge in postopki reševanja*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2015.

[5] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 2, Naloge in postopki reševanja*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2016.