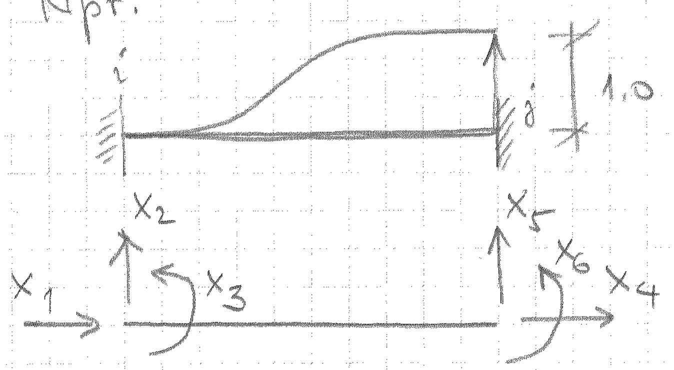
[K] je togostna matrika konstrukcije,
{U} je vektor pomikov
{F} je vektor sil

Posamezni členi togostne matrike predstavljajo sile v konstrukciji ki se pojavijo v konstrukciji pri enotnih pomikih.

Npr.



prostostne stopnje

V obojestransko upetem nosilcu premaknemo desno podporo za 1.0 v navpični smeri. Zaradi tega se v nosilcu pojavijo notranje sile. Te notranje sile lahko zapišemo v matrični obliki, kjer vsaka izmed sil predstavlja en člen togostne matrike.
V prikazanem primeru je

$X_1 = k_{15}$; $X_2 = k_{25}$; $X_3 = k_{35}$
$X_4 = k_{45}$; $X_5 = k_{55}$; $X_6 = k_{56}$

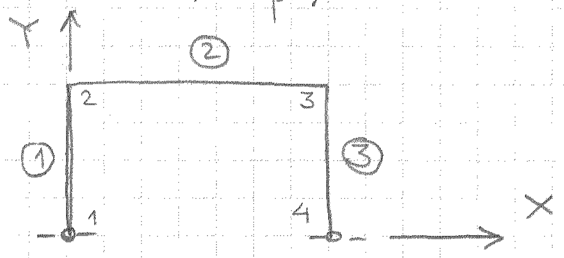
k_{15} je element v prvi vrstici in 5. stolpcu togostne matrike in predstavlja osno silo v vozlišču i zaradi ~~pomi~~ navpičnega pomika v vozlišču j.
Prikazani element ima 6 prostostnih stopenj. Vsako označimo z zaporedno številko. Potem velja, da je:

k_{ij} → Sila v smeri prostostne stopnje i, ki jo povzroča premik v smeri prostostne stopnje k

<u>Teoretično</u>

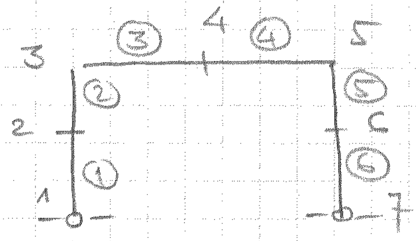
Enačbo 2 lahko rešimo na 2 načina: analitično in numerično.

Numerično jo lahko rešimo s pomočjo metode končnih elementov.
Pri tej metodi razdelimo konstrukcijo na elemente določenih dolžin - končne elemente. Npr.:



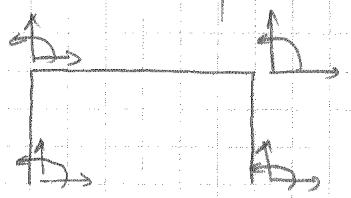
(a)

Konstrukcijo na sliki razdelimo na 3 elemente, ki so povezani v 4 vozliščih. Običajno za končne elemente izberemo posamezne dele konstrukcije. Npr. v primeru zgoraj sta to 2 stebra in prečka. Vendar to ni pravilo. Npr. v zgornjem primeru lahko oba stebra in prečko razdelimo na več elementov. V tem primeru ima model konstrukcije tudi več vozlišč.



(b)

Ko razdelimo konstrukcijo na več delov (elementov) potem predstavlja v enačbi 2 vektor {U} vektor vozliščnih premikov. V zgornji konstrukciji (a) je to vektor premikov prikazanih na sliki levo.



Matriko [K] ~~je~~ togostno matriko konstrukcije določimo na podlagi togosti posameznih elementov, tako kot bo opisano pozneje.

<u>Vektor</u> {F} predstavlja vektor vozliščnih sil. To so sile, ki delujejo v posameznih vozliščih. Lahko so to sile zaradi obtežbe konstrukcije, in reakcije v podporah. V splošnem velja

$$\{F\} = \{R\} + \{A\}$$

{R} je vektor reakcij {A} je vektor obtežbe (akcij) v vozliščih konstrukcije.

Vozliščni pomiki {U}, ki jih določamo na podlagi enačbe (2) so definirani v globalnem koordinatnem sistemu konstrukcije. Zato morata biti tudi matrika K in vektor F definirana (določena) v globalnem koord. sistemu.

Matriko [K] določimo iz togostnih matrik posameznih elementov. Slednje določimo najprej v lokalnem koordinatnem sistemu vzdolž elementa potrebej. Nato vse te matrike transformiramo iz lokalnega v globalni koord. sistem.

Enako je z vektorjem {A} → vektor akcij (sil) v vozliščih. Na vsakem elementu najprej določimo vozliščne sile v lokalnem koord. sistemu, nato ga transformiramo v globalni koord. sistem.

Nato lahko izračunamo pomike konstrukcije na podlagi enačbe (2). Na podlagi izračunanih pomikov potem določimo notranje sile v konstrukciji. Oba postopka bosta opisana kasneje.

Reševanje enačbe (2) s pomočjo metode končnih elementov poteka v naslednjih korakih, ki bodo opisani v nadaljevanju:

1) določimo togostne matrike posameznih elementov v lokalnih sistemih elementov

2) transformiramo togostne matrike elementov iz lokalnih v globalni koordinatni sistem

3) določimo togostno matriko konstrukcije s seštevanjem matrik posameznih elementov na način ki bo opisan kasneje

4) določimo vektorje vozliščnih sil - akcij v vozliščih elementov nato pa jih kombiniramo v vektor vozliščnih sil celotne konstrukcije

5) Izračunamo neznane pomike vozlišč

6) Določimo reakcije

7) Pomike vozlišč transformiramo iz

globalnega v lokalne koordinatne sisteme elementov

8) Iz pomikov vozlišč, izraženimi v lokalnem koordinatnem sistemu elementa, izračunamo notranje sile v elementu.

Vsi ti koraki so opisani v nadaljevanju.

F_o → vektor sil, ki so enake 0

F_r → vektor sil, različnih od 0

U_o → premiki v smereh sil, ki so 0

U_r → premiki v smereh sil, ki so različne od 0

k_{rr} → del togostne matrike, ki kaže vpliv enotnih premikov U_r na sile F_r

k_{ro} → del togostne matrike, ki predstavlja vpliv enotnih premikov U_o na sile F_r

k_{or} → del togostne matrike, ki predstavlja vpliv enotnih premikov U_r na sile F_o

k_{oo} → del togostne matrike, ki predstavlja vpliv enotnih premikov U_o na sile F_o

Velja:

$$[k_{rr}]\{U_r\} + [k_{ro}]\cdot\{U_o\} = \{F_r\} \qquad (1)$$

$$[k_{or}]\{U_r\} + [k_{oo}]\cdot\{U_o\} = \{F_o\} = \{0\} \qquad (2)$$

Pomnožimo drugo enačbo z leve z $[k_{oo}]^{-1}$ in jo uredimo tako, da določimo pomike $\{U_o\}$

$$\{U_o\} = -[k_{oo}]^{-1}[k_{or}]\{U_r\} \qquad (3)$$

Enačbo 3 vstavimo v enačbo 1

$$[k_{rr}]\{U_r\} - [k_{ro}][k_{oo}]^{-1}[k_{or}]\{U_r\} = \{F_r\}$$

$$\left([k_{rr}] - [k_{ro}][k_{oo}]^{-1}[k_{or}]\right)\cdot\{U_r\} = \{F_r\}$$

$$\boxed{[k]_k = [k_{rr}] - [k_{ro}][k_{oo}]^{-1}[k_{or}]} \qquad (4)$$

$$[k]_k\cdot\{U_r\} = \{F_r\}$$

$[k]_k$ je kondenzirana matrika

V obravnavanem primeru je matrika koo skalar, oziroma

$$[k_{oo}]^{-1} = \frac{1}{k_{66}} = \frac{l}{4EJ}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad & \quad 5 \quad \end{array} \\
[k_{rr}] = & \left[\begin{array}{ccccc}
\frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & \\
 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & & -\frac{12EJ}{l^3} \\
 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & & -\frac{6EJ}{l^2} \\
-\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & \\
 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & & \frac{12EJ}{l^3}
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & 6 \\
[k_{ro}] = & \left[\begin{array}{c}
 \\
\frac{6EJ}{l^2} \\
\frac{2EJ}{l} \\
 \\
-\frac{6EJ}{l^2}
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad & \quad 5 \end{array} \\
[k_{or}] = & \left[\begin{array}{ccccc}
 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & & -\frac{6EJ}{l^2}
\end{array}\right] 6
\end{array}
$$

Ko zgornje matrike vstavimo v matrično enačbo (4) dobimo togostno matriko elementa, ki je v vozlišču j členkasto povezan s preostalimi deli konstrukcije. (Postopek, s katerim določimo k je na str. 8)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad & \quad 5 \quad \end{array} \\
k_e = & \left[\begin{array}{ccccc}
\frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & \\
 & \frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} & & -\frac{3EJ}{l^3} \\
 & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} & & -\frac{3EJ}{l^2} \\
-\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & \\
 & -\frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} & & \frac{3EJ}{l^3}
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
\qquad (5)
$$

kor = (0 6EI/l^2 2EI/l 0 -6EI/l^2)

Out[26]= $\{\{0, \frac{6\,EI}{l^2}, \frac{2\,EI}{l}, 0, -\frac{6\,EI}{l^2}\}\}$

In[41]:= **kro = Transpose[kor] ; MatrixForm[kro]** $[k_{ro}] = [k_{or}]^T$

Out[41]//MatrixForm=

$$[k_{ro}] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6\,EI}{l^2} \\ \frac{2\,EI}{l} \\ 0 \\ -\frac{6\,EI}{l^2} \end{pmatrix}$$

In[33]:= **koo = 1 / (4 EI)** $^{-1}$

Out[33]= $\frac{1}{4\,EI} = [K_{oo}]^{-1}$

In[42]:= **k1 = Dot[kro, kor] * koo; MatrixForm[k1]** $[k_1] = [k_{ro}]\,[k_{oo}]^{-1}\,[k_{or}]$

Out[42]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\,EI}{l^3} & \frac{3\,EI}{l^2} & 0 & -\frac{9\,EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3\,EI}{l^2} & \frac{EI}{l} & 0 & -\frac{3\,EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9\,EI}{l^3} & -\frac{3\,EI}{l^2} & 0 & \frac{9\,EI}{l^3} \end{pmatrix} = [k_{ro}][k_{oo}]^{-1}[k_{or}] = [k_1]$$

In[44]:= **krr =**

$$\begin{pmatrix} \text{EA / l} & 0 & 0 & \text{-EA / l} & 0 \\ 0 & \text{12 EI / l^3} & \text{6 EI / l^2} & 0 & \text{-12 EI / l^3} \\ 0 & \text{6 EI / l^2} & \text{4 EI / l} & 0 & \text{-6 EI / l^2} \\ \text{-EA / l} & 0 & 0 & \text{EA / l} & 0 \\ 0 & \text{-12 EI / l^3} & \text{-6 EI / l^2} & 0 & \text{12 EI / l^3} \end{pmatrix}$$

; MatrixForm[krr]

Out[44]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI}{l^3} & \frac{6\,EI}{l^2} & 0 & -\frac{12\,EI}{l^3} \\ 0 & \frac{6\,EI}{l^2} & \frac{4\,EI}{l} & 0 & -\frac{6\,EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{12\,EI}{l^3} & -\frac{6\,EI}{l^2} & 0 & \frac{12\,EI}{l^3} \end{pmatrix} = [k_{rr}]$$

In[45]:= **k = krr - k1 // MatrixForm** $[k_2] = [k_{rr}] - [k_1]$

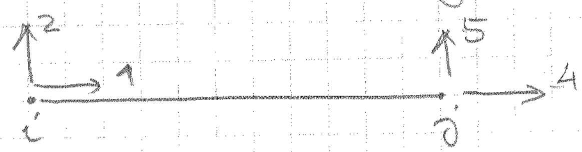
Out[45]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3\,EI}{l^3} & \frac{3\,EI}{l^2} & 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3\,EI}{l^2} & \frac{3\,EI}{l} & 0 & -\frac{3\,EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} & -\frac{3\,EI}{l^2} & 0 & \frac{3\,EI}{l^3} \end{pmatrix} = [k_2]$$

Togostna matrika elementa, ki je členkasto povezan s preostalimi deli konstrukcije v obeh vozliščih i in j

~~Obravnavanje~~

Prostostne stopnje



sl. 12

Matriko k elementa, ki je togo povezan z ostalimi v obeh vozliščih (i in j) lahko v tem primeru kondenziramo upoštevajoč da sta oba momenta M_i in M_j enaka 0. Lahko pa tudi kondenziramo matriko podano v enačbi (5), kjer upoštevamo da je moment v vozlišču i $M_i = 0$ oziroma $F_3 = 0$

$[k_{00}]^{-1}$ je zopet skalar $= k_{33}^{-1} = \frac{l}{3EJ}$

$$k_{rr} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \frac{EA}{l} & & -\frac{EA}{l} & \\ 2 & & \frac{3EJ}{l^3} & & -\frac{3EJ}{l^3} \\ 4 & -\frac{EA}{l} & & \frac{EA}{l} & \\ 5 & & -\frac{3EJ}{l^3} & & \frac{3EJ}{l^3} \end{array}$$

$$k_{r0} = \begin{array}{c|c} & 3 \\ \hline 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 4 & 0 \\ 5 & \frac{3EJ}{l^2} \end{array} \qquad k_{0r} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \end{array}$$

Ko tomje matrike uvrstimo v matrično enačbo (4) ~~dobi~~ (glej postopek na str. 10) dobimo togostno matriko

$$k_k = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \frac{EA}{l} & & -\frac{EA}{l} & \\ 2 & & & & \\ 4 & -\frac{EA}{l} & & \frac{EA}{l} & \\ 5 & & & & \end{array}$$

In[54]:= $\boxed{\text{kor}}$= (0 3EI/l^2 0 -3EI/l^2)

Out[54]= $\{\{0, \frac{3\,EI}{l^2}, 0, -\frac{3\,EI}{l^2}\}\}$

In[55]:= $\boxed{\text{kro}}$= Transpose[kor]; MatrixForm[kro]

$[k_{ro}] = [k_{or}]^T$

Out[55]//MatrixForm=

$$[k_{ro}] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\,EI}{l^2} \\ 0 \\ -\frac{3\,EI}{l^2} \end{pmatrix}$$

-1

In[56]:= $\boxed{\text{koo}}$= 1/(3EI)

Out[56]= $\frac{1}{3\,EI} = [k_{oo}]^{-1}$

In[57]:= k1 = Dot[kro, kor] * $\boxed{\text{koo}}^{-1}$; MatrixForm[k1]

$[k_1] = [k_{ro}][k_{oo}]^{-1}[k_{or}]$

Out[57]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\,EI}{l^3} & 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} & 0 & \frac{3\,EI}{l^3} \end{pmatrix} = [k_{ro}][k_{oo}]^{-1}[k_{or}] = k_1$$

In[58]:= $\boxed{\text{krr}}$= $\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3\,EI}{l^3} & 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} & 0 & \frac{3\,EI}{l^3} \end{pmatrix}$; MatrixForm[krr]

Out[58]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3\,EI}{l^3} & 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3\,EI}{l^3} & 0 & \frac{3\,EI}{l^3} \end{pmatrix} = [k_{rr}]$$

$[k] = [k_{rr}] - [k_1]$

In[59]:= k = krr - k1 // MatrixForm

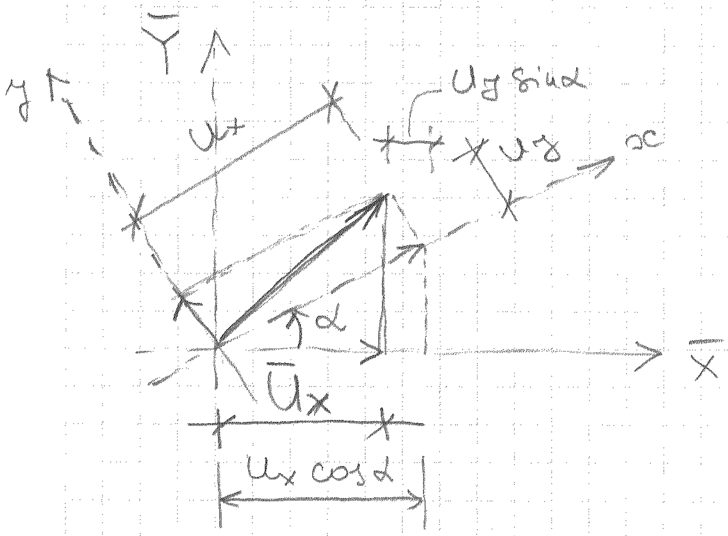
Out[59]//MatrixForm=

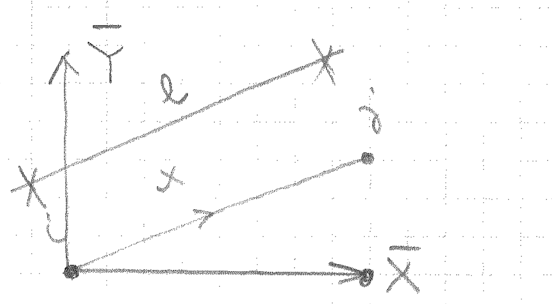
$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [k_k]$$

2. Transformacija togostne matrike elementa iz lokalnega v globalni koordinatni sistem

$$[k]_e \cdot \{u\}_e = \{F\}_e$$

$[k]_e$ → togostna matrika v lokalnem koord. sistemu
$\{u\}_e$ → premiki v lokal. koord. sist.
$\{F\}_e$ → vozliščne sile v lokaln. koord. sistemu





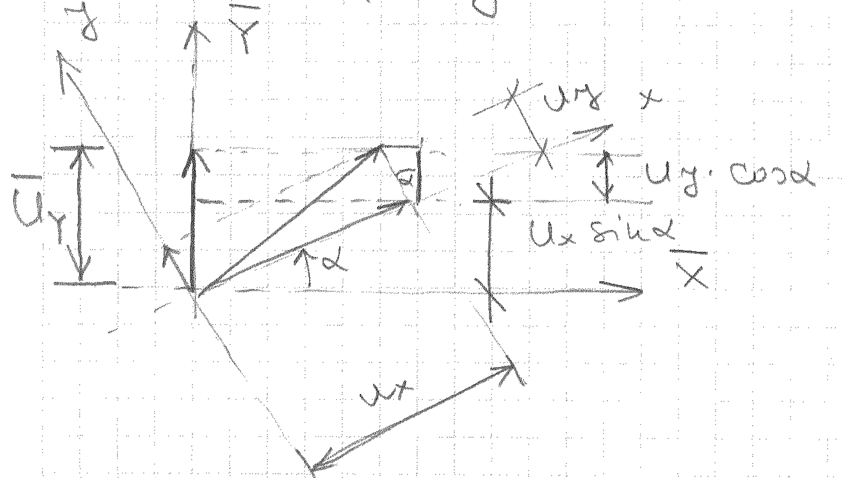
Sl. 13

$$\bar{U}_X = u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha = u_x \cos(X,x) - u_y \sin(X,x)$$

$$\cos(X,x) = \frac{X_j - X_i}{l} = p$$

$$\sin(X,x) = \frac{Y_j - Y_i}{l} = m$$

$$\bar{U}_X = u_x \cdot p - u_y \cdot m$$



Sl. 14

$$\bar{U}_Y = u_x \sin\alpha + u_y \cos\alpha = u_x \sin(X,x) + u_y \cos(X,x)$$

$$\bar{U}_Y = u_x \cdot m + u_y \cdot p$$

$\varphi_z = \Phi_z$ zasuk je enak v lokalnem in v globalnem koordinatnem sistemu

V enem vozlišču velja:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{xi} \\ \bar{U}_{yi} \\ \Phi_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -m & 0 \\ m & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \varphi_{zi} \end{Bmatrix}$$

$$\{U\}_g^i = [T_0]\{u\}_e^i$$

$\{U\}_g^i$ → pomiki v globalnem koordinatnem sistemu v vozlišču i

Element ima 2 vozlišča zato transformiramo pomike v vozlišču j na enak način kot v vozlišču i. Za cel element lahko potem zapišemo transformacijo kot:

$$\{U\}_g = [T]\{u\}_e = \begin{bmatrix} [T_0] & \\ & [T_0] \end{bmatrix}\{u\}_e$$

Pri čemer je:

$$\{U\}_g = \begin{Bmatrix} \bar{U}_{xi} \\ \bar{U}_{yi} \\ \Phi_{zi} \\ \bar{U}_{xj} \\ \bar{U}_{yj} \\ \Phi_{zj} \end{Bmatrix} ; \quad \{u_e\} = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \varphi_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_0] & \\ & [T_0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -m & \\ 0 & 0 & 0 & m & p & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[T]$ je transformacijska matrika elementa

Tudi za sile v vozliščih velja

$$\{F\}_g = [T] \cdot \{F\}_e \qquad (6)$$

$$[k]_e \cdot \{U\}_e = \{F\}_e \qquad (7)$$

Izrazimo pomike v lokalnem koordinatnem sistemu preko pomikov v globalnem koord. sistemu

$$[T]^T / \{U\}_g = [T]\{U\}_e$$

$$[T]^T\{U\}_g = [T]^T[T]\{U\}_e$$

V primeru matrike $[T]$ velja da je produkt $[T]^T[T] = [I]$ kjer je $[I]$ matrika, kjer so diagonalni členi 1.0 izven diagonalni pa 0.

$$[T]^T\{U\}_g = \{U\}_e \qquad (8)$$

Vstavimo enačbo (8) v enačbo (7)

$$[T]\cdot / [k]_e[T]^T\{U\}_g = \{F\}_e$$

$$[T][k]_e[T]^T\{U\}_g = [T]\{F\}_e$$

$$\boxed{[k]_g\{U_i\}_g = \{F_i\}_g} \qquad (9)$$

kjer velja, da je

$[k]_g = [T][k]_e[T]^T$ – togostna matrika elementa v globalnem koordinatnem sistemu.

3. Togostna matrika konstrukcije

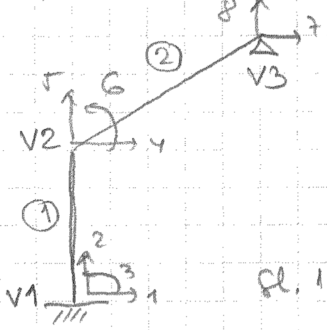
-popravek-

Potem ko določimo togostne matrike elementov v globalnem koordinatnem sistemu lahko določimo togostno matriko celotne konstrukcije.
Izhajajoč iz principa o minimumu potencialne energije se lahko dokaže, da velja naslednja enačba:

$$K = \sum_e (K_e)_g$$

kjer je K togostna matrika konstrukcije, $(K_e)_g$ pa togostna matrika elementa e v globalnem koordinatnem sistemu.

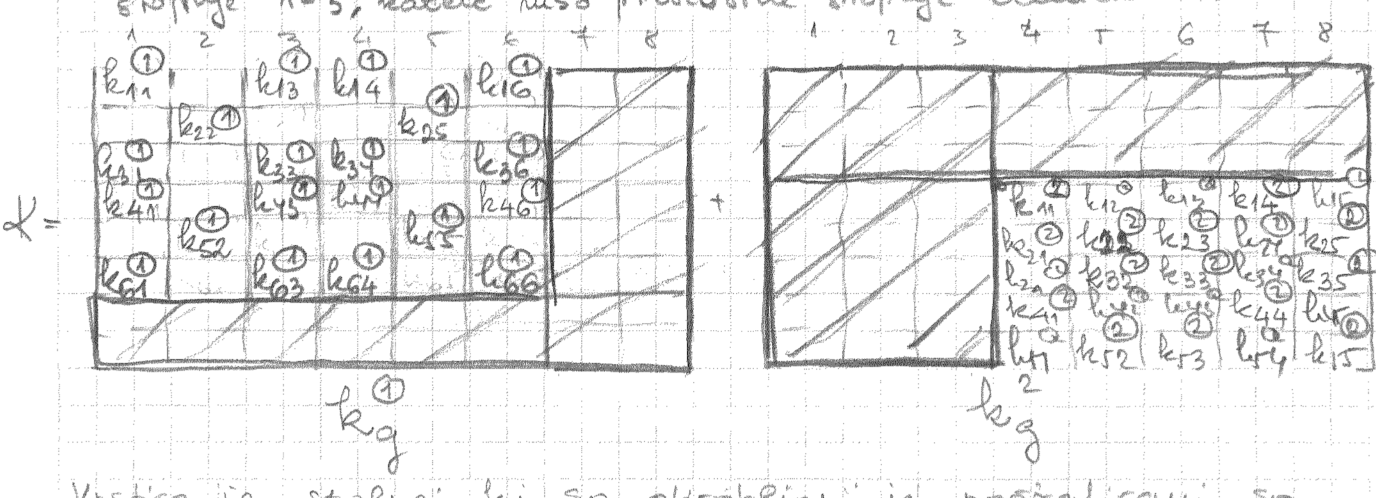
Matrike elementov $(K_e)_g$ so reda $m \times m$, kjer je m število prostostnih stopenj konstrukcije.



sl. 15

V primeru na sliki je $m = 8$. Pri izpeljavi matrik posameznih elementov je bilo pokazano da je red togostne matrike elementa 1 $m_1 = 6$ (element 1 ima 6 prostostnih stopenj). Element 2 ima 5 prostostnih stopenj zato je red togostne matrike $m_2 = 5$

Preden določimo togostno matriko celotne konstrukcije moramo povečati red togostnih matrik elementov in sicer tako da vstavimo prazne vrstice in stolpce. Nato matrike elementov seštejemo. Prazne vrstice in stolpce dodamo tako kot je prikazano na primeru na sl. 15. Npr. matriki el. 2 prazne vrstice in stolpce dodamo na začetku saj se te nanašajo na prostostne stopnje 1-3, katere niso prostostne stopnje elementa 2.



Vrstice in stolpci, ki so obrobljeni in pošrafirani so dodani matrikam elementov (izpeljane na str. 1-8). Vsi členi teh vrstic in stolpcev so 0.

Potem je togostna matrika konstrukcije

$$K = \begin{array}{c|cccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
1 & k_{11}^{(1)} & & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & & k_{16}^{(1)} & & \\
2 & & k_{22}^{(1)} & & & k_{25}^{(1)} & & & \\
3 & k_{31}^{(1)} & & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & & k_{36}^{(1)} & & \\
4 & k_{41}^{(1)} & & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & 0+k_{12}^{(2)} & k_{46}^{(1)}+k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} \\
5 & & k_{52}^{(1)} & & 0+k_{21}^{(2)} & k_{55}^{(1)}+k_{22}^{(2)} & 0+k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} \\
6 & k_{61}^{(1)} & & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)}+k_{31}^{(2)} & 0+k_{32}^{(2)} & k_{66}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} \\
7 & & & & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} \\
8 & & & & k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} \\
\hline
\end{array}$$

(1) → označuje elemente togostne matrike 1. elementa
(2) → označuje elemente togostne matrike 2. elementa

Iz primera je razvidno da seštevamo tiste člene togostnih matrik elementov, ki se nanašajo na prostostne stopnje vozlišča, kjer so elementi med sabo povezani.

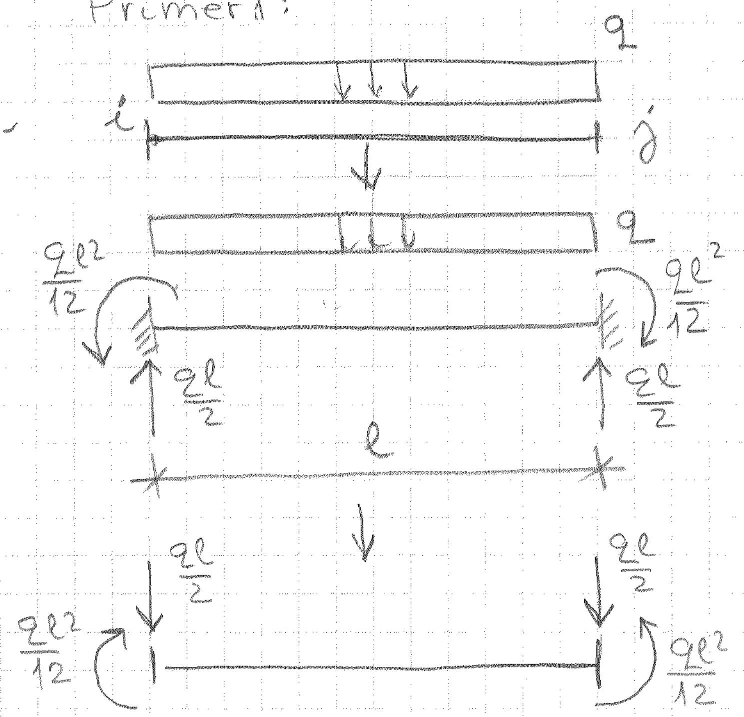
V obravnavanem primeru se elementa (1) in (2) stikujeta v vozlišču V2 kjer so prostostne stopnje označene z 4, 5 6 (glej sliko 18). Zato seštejemo člene matrike elementa 1, ki se nanašajo na prostostne stopnje 4 5 6 z ustreznimi členi togostne matrike elementa 2 ki se ravno tako nanašajo na te tri prostostne stopnje. V obravnavanem primeru se te vsote nahajajo v vrsticah 4-6 in stolpcih 4-6 togostne matrike celotne konstrukcije K (glej del zgoraj prikazane matrike, ki je obkrožen z odebeljeno črto).

4. Vektorji akcij v vozliščih

Pri uporabi MKE za določitev pomikov konstrukcije mora vsa obtežba biti podana v vozliščih. V primeru ko je obtežba podana vzdolž elementa (kar je zelo pogosto v realnih konstrukcijah) jo moramo nadomestiti z ustrezno vozliščno obtežbo.

Na elementih ki so togo povezani v obeh vozliščih s preostalimi deli konstrukcije vozliščno obtežbo določimo kot reakcije obojestransko vpetega nosilca, le da je smer vozliščne obtežbe nasprotna od reakcij.

Primer 1:

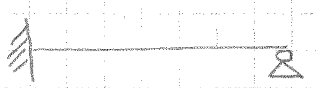
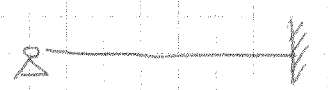


Obtežbo q moramo nadomestiti z vozliščno obtežbo

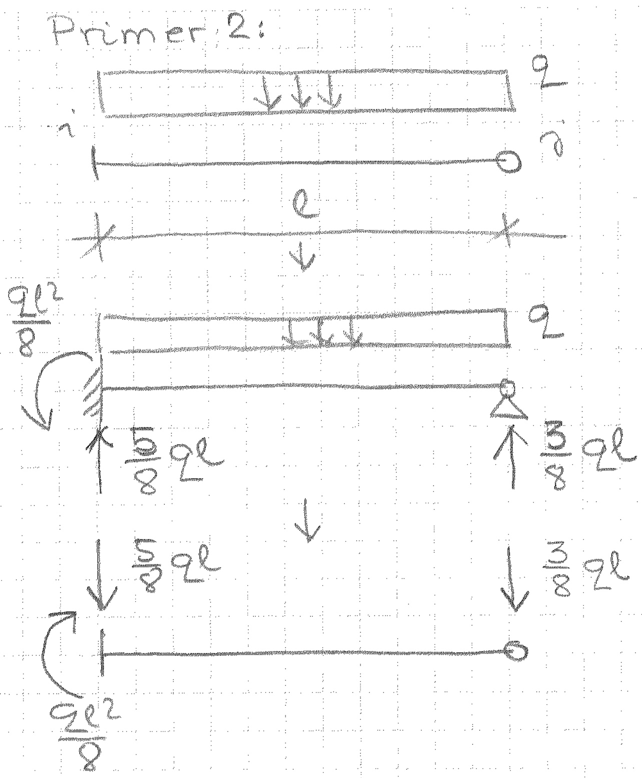
sl. 16

Vozliščna obtežba

V primeru ko je element na eni strani členkasto povezan s preostalimi deli konstrukcije vozliščne sile določimo kot reakcije nosilca

 ali . Vrtljiva podpora je na tisti strani na kateri je element členkasto povezan z ostalimi.

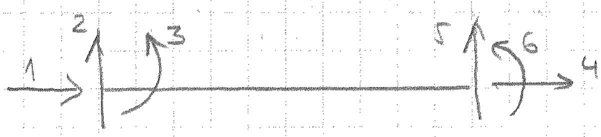
Primer 2:



sl. 17

vozliščna obtežba

Ko zapišemo vozliščno obtežbo v vektorski obliki upoštevamo dogovor o pozitivnih smereh sil:



Sile zapišemo v vrstnem redu prikazanem na sliki

V primeru 1 je potem vektor vozliščnih sil – vektor akcij

$$\{A\}_e = \begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \\ 0 \\ -ql/2 \\ +ql^2/12 \end{array}\right\} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

V primeru 2:

$$\{A\}_e = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -5/8\,ql \\ -ql^2/8 \\ 0 \\ -3/8\,ql \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \end{array}$$

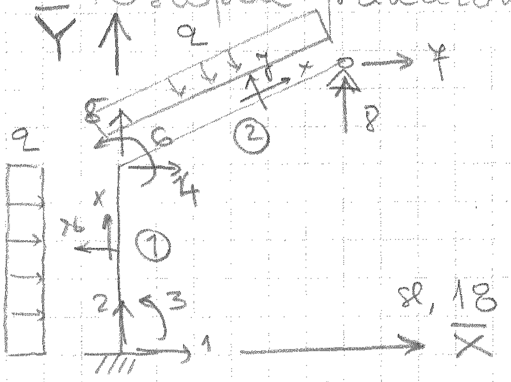
Vektor $\{A\}$ je določen v lokalnem koordinatnem sistemu elementa. Ker osnovno enačbo $[K]\cdot\{U\}=\{F\}$ rešujemo v globalnem koordinatnem sistemu, moramo vektorje $\{A\}$ transformirati iz lokalnih v globalni koordinatni sistem. Pri tem uporabimo enake enačbe kot v primeru transformacije togostnih matrik (glej poglavje 2.)

$$\{A\}_g = [T]\{A\}_e$$

$\{A\}_g$ – vozliščne sile v globalnem koord. sistemu
$\{A\}_e$ – vozliščne sile v lokalnem koord. sistemu
$[T]$ – transformacijska matrika

Potem določimo vektor vozliščnih sil za celotno konstrukcijo.

Postopek prikažimo na primeru konstrukcije



sl. 18

$$\{A\}_e^{①} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \\ 0 \\ -ql/2 \\ ql^2/12 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \{A\}_e^{②} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5/8\,ql \\ -ql^2/8 \\ 0 \\ -3/8\,ql \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\{A\}_g^{①} = \begin{Bmatrix} F_1^{①} \\ F_2^{①} \\ F_3^{①} \\ F_4^{①} \\ F_5^{①} \\ F_6^{①} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \{A\}_g^{②} = \begin{Bmatrix} F_1^{②} \\ F_2^{②} \\ F_3^{②} \\ F_4^{②} \\ F_5^{②} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Sile, prikazane v vektorjih $\{A\}_g^{①}$ in $\{A\}_g^{②}$ predstavljajo vozliščne sile v smereh globalnega koordinatnega sistema (glej sl. 18 sile 1–8)

Sile $F_4^{①}$, $F_5^{①}$ in $F_6^{①}$ v vektorju $\{A\}_g^{①}$ predstavljajo sile v smereh 4, 5 in 6, sile $F_1^{②}$, $F_2^{②}$, $F_3^{②}$ so ravno tako sile v smereh 4, 5, 6 (glej sl. 18) le, da so posledica obtežbe na elementu ②

Zato te sile lahko seštejemo in sicer

$$F_4^{①} + F_1^{②}\;;\quad F_5^{①} + F_2^{②}\;;\quad F_6^{①} + F_3^{②}$$

Sile v smereh 1, 2 in 3 globalnega koordinatnega sistema so posledica obtežbe samo na elementu 1. ($F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_2^{(2)}$)
Sile 7 in 8 pa določa le obtežba na elementu 2 ($F_4^{(2)}, F_5^{(2)}$)

Sedaj lahko napišemo vektor vozliščnih sil-akcij za celotno konstrukcijo

$$\{A\} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_5^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_6^{(1)} + F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \\ F_5^{(2)} \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Postopek lahko tudi avtomatiziramo. Vidimo da ima vektor vozliščnih akcij za celotno konstrukcijo toliko elementov kolikor ima konstrukcija prostostnih stopenj. Vektorje posameznih elementov razširimo tako, da imajo enako število elementov kot vektor vozliščnih akcij celotne konstrukcije. To naredimo tako da na mestu vozliščnih sil, na katere ne vpliva obtežba obravnavanega elementa dodamo 0.

Na primer, ~~ob~~ v konstrukciji na sl. 18 obtežba elementa 1 ne vpliva na vozliščne sile 7 in 8 zato vektor $\{A\}_g^{(1)}$ spremenimo (razširimo) v

$$\{\bar{A}\}_g^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \\ F_5^{(1)} \\ F_6^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

zaporedne številke vozliščnih sil v globalnem koord. sistemu

Na podoben način spremenimo vektor $\{A\}_g^{(2)}$. Obtežba na elementu ② ne povzroča vozliščnih sil 1, 2 in 3. Zato vektor spremenimo v

$$\{\bar{A}\}_g^{(2)} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \\ F_5^{(2)} \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

zaporedne številke vozliščnih sil v globalnem koord. sistemu

Potem lahko vektorja $\{\bar{A}\}_g^{(1)}$ in $\{\bar{A}\}_g^{(2)}$ enostavno seštejemo in dobimo vektor $\{A\}$.
V ~~[illegible]~~ vozliščih, ki so podprta (tam kjer so podpore) delujejo poleg vozliščnih sil, ki predstavljajo akcije, tudi reakcije. Zato lahko vektor vozliščnih sil $\{F\}$ celotne konstrukcije zapišemo kot

$$\{F\} = \{A\} + \{R\}$$, kjer $\{R\}$ predstavlja vektor reakcij

V primeru konstrukcije na sl. 18 je vektor reakcij

$$\{R\} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_7 \\ R_8 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Na mestu in v smereh 4, 5 in 6 ni reakcij, ker ustrezno vozlišče ni podprto. V obravnavanem primeru je vektor vozliščnih sil

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1^{(1)} + R_1 \\ F_2^{(1)} + R_2 \\ F_3^{(1)} + R_3 \\ \boxed{\begin{array}{c} F_4^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_5^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_6^{(1)} + F_3^{(2)} \end{array}} \\ F_4^{(2)} + R_7 \\ F_5^{(2)} + R_8 \end{array} \right\}$$

V nepodprtih vozliščih so vozliščne sile enake akcijam

– popravek

5) Račun pomikov vozlišč

Na mestu podpor poznamo vrednosti premikov konstrukcije. Največkrat so te vrednosti 0. Teh premikov ni potrebno računati. Torej nas med vsemi enačbami, ki jih vsebuje matrična enačba $[K]\{U\}=\{F\}$ zanimajo le tiste, ki se nanašajo na premike v nepodprtih vozliščih. Preuredimo vektor $\{U\}$ tako da v njem združimo znane komponente v vektor $\{U_z\}$ in združimo neznane komponente v vektor $\{U_n\}$

$\{U_z\}$ → pomiki podpor

$\{U_n\}$ → pomiki prostih vozlišč

Potem se osnovna enačba glasi:

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zn} \\ K_{nz} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_z \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z \\ F_n \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

$\{F_z\}$ → vozliščne sile v podporah

$\{F_n\}$ → vozliščne sile v prostih vozliščih

V primeru na sl. 18 bi zgornja enačba izgledala ~~tako~~:

$$\begin{array}{c|ccccc|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & k_{11} & & k_{13} & K_{zz} & & k_{14} & & k_{16} \\
2 & & k_{22} & & & & & k_{25} & K_{zn} \\
3 & k_{31} & & k_{33} & & & k_{34} & & k_{36} \\
7 & & & & k_{77} & k_{78} & k_{74} & k_{75} & k_{76} \\
8 & & & & k_{87} & k_{88} & k_{84} & k_{85} & k_{86} \\
\hline
4 & k_{41} & & k_{43} & k_{47} & k_{48} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\
5 & & k_{52} & & k_{57} & k_{58} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\
6 & k_{61} & & k_{63} & k_{67} & k_{68} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \\
\hline
 & & & K_{nz} & & & & K_{nn} &
\end{array}
\cdot
\begin{array}{|c|l}
U_1 & \\
U_2 & U_z \\
U_3 & \\
U_7 & \\
U_8 & \\
\hline
U_4 & \\
U_5 & U_n \\
U_6 &
\end{array}
=
\begin{array}{|c|l}
F_1 & \\
F_2 & \\
F_3 & F_z \\
F_7 & \\
F_8 & \\
\hline
F_4 & \\
F_5 & F_n \\
F_6 &
\end{array}$$

Obravnavajmo le del, ki nam omogoča da izračunamo neznane pomike (enačbe, ki se nanašajo na prosta vozlišča)

$[K_{nz}] \cdot \{U_z\} + [K_{nn}] \cdot \{U_n\} = \{F_n\}$

$\{F_n\} \rightarrow$ vektor vozliščnih sil v prostih vozliščih je enak vektorju akcij v teh vozliščih

$$\{U_n\} = [K_{nn}]^{-1}\{F_n\} - [K_{nn}]^{-1}[K_{nz}]\{U_z\}$$

V primerih ko so pomiki v vseh podporah 0 se enačba poenostavi:

$$\boxed{\{U_n\} = [K_{nn}]^{-1}\{F_n\}}$$

Knn imenujemo reducirana matrika konstrukcije

Tako določimo neznane pomike v prostih vozliščih.

6. Račun reakcij

Če v matrični enačbi (10) upoštevamo le tiste, ki se nanašajo na podpore lahko te enačbe zapišemo kot:

$$[K_{zz}]\{U_z\} + [K_{zn}]\{U_n\} = \{F_z\}$$

Na ta način določimo vozliščne sile $\{F_z\}$ v podporah. Reakcije izračunamo tako da od sil $\{F_z\}$ odštejemo akcije v vozliščih (sile zaradi obtežbe)

$$\{R\} = \{F_z\} - \{A\}$$

7. Transformacija vozliščnih pomikov iz globalnega v lokalni koordinatni sistem

Za vsak element konstrukcije posebej določimo pomike njegovih vozlišč v lokalnem koordinatnem sistemu. Pri tem upoštevamo zvezo

$\{U\}_g = [T]\{U\}_e$ oziroma

$\{U\}_e = [T]^T\{U\}_g$

kjer so:

$\{U\}_g$ pomiki vozlišč ~~elementov~~ v globalnem koordinatnem sistemu

$\{U\}_e$ pomiki vozlišč ~~elementa~~ v lokalnem koordinatnem sistemu

$[T]$ transformacijska matrika

8. Račun notranjih sil elementa

Ko poznamo pomike vozlišč elementa v lokalnem koordinatnem sistemu lahko določimo notranje sile v elementu in sicer upoštevajoč enačbo

$$[k]_e \{u\}_e = \{f\}$$

$[k]_e$ je togostna matrika elementa v lokalnem koord. sistemu

$\{u\}_e$ so pomiki vozlišč elementa v lokalnem koordinatnem sistemu

$\{f\}$ so sile v vozliščih elementa

Notranje sile $\{f\}_n$ dobimo ko od sil $\{f\}$ odštejemo $\{A\}_e$ - vektor ~~vozli~~ akcij v vozlišču.

$$\{f\}_n = \{f\} - \{A\}_e$$

Potek notranjih sil vzdolž elementa določimo glede na vrsto obtežbe na elementu.

Račun primera za MKE s pomočjo programa Matlab

```
%Primer MKE1

clear

%Togostna matrika elementa 1 - v lokalnem koordinatnem sistemu
k1=[   2.5     0       0       -2.5    0       0
       0       0.0667  0.1     0       -0.0667 0.1
       0       0.1     0.2     0       -0.1    0.1
       -2.5    0       0       2.5     0       0
       0       -0.0667 -0.1    0       0.0667  -0.1
       0       0.1     0.1     0       -0.1    0.2]*10^6;

%Togostna matrika elementa 2 - v lokalnem koordinatnem sistemu
k2=[   2.65    0       0       -2.65   0
       0       0.0199  0.0562  0       -0.0199
       0       0.0562  0.159   0       -0.0562
       -2.65   0       0       2.65    0
       0       -0.0199 -0.0562 0       0.0199]*10^6;

%Transformacijska matrika elementa 1
T1=[   0       -1      0       0       0       0
       1       0       0       0       0       0
       0       0       1       0       0       0
       0       0       0       0       -1      0
       0       0       0       1       0       0
       0       0       0       0       0       1];

%Transformacijska matrika elementa 2
T2=[   0.707   -0.707  0       0       0
       0.707   0.707   0       0       0
       0       0       1       0       0
       0       0       0       0.707   -0.707
       0       0       0       0.707   0.707];

%Togostni matriki v globalnem koordinatnem sistemu
K1=T1*k1*T1';
K2=T2*k2*T2';

%Togostna matrika konstrukcije
K1n=[K1;zeros(2,6)];
K1n=[K1n zeros(8,2)];

K2n=[zeros(3,5);K2];
K2n=[zeros(8,3) K2n];

K = K1n+K2n

%Reducirana matrika konstrukcije, ter matriki Kzz in Kzn
Knn=K(4:6,4:6)
Kzz1=[K(1:3,1:3);K(7:8,1:3)];
Kzz2=[K(1:3,7:8);K(7:8,7:8)];
Kzz=[Kzz1 Kzz2]
Kzn = [K(1:3,4:6);K(7:8,4:6)]

% Vektor akcij na vozlišča
f1=[0 -15 -7.5 0 -15 7.5]';
F1=T1*f1;
f2=[0 -17.7 -10 0 -10.6]';
F2=T2*f2;
F=[F1;zeros(2,1)]+[zeros(3,1);F2]

% Akcije v vozliščih, kjer so premiki različni od 0
Fn = F(4:6,1);

%inverzna matrika matrike Knn
invKnn=inv(Knn)

% Neznani premik
Un=inv(Knn)*Fn
```

```
%Račun reakcij
R =Kzn*Un;
R=R-[F(1:3,1);F(7:8,1)]

%Račun notranjih sil v elementih
U1 = [zeros(3,1);Un];
U2 = [Un;zeros(2,1)];

u1l = T1'*U1;
u2l =T2'*U2;

NS1=k1*u1l-f1
NS2=k2*u2l-f2
```

```
Commands to get started: intro, demo, help help
Commands for more information: help, whatsnew, info, subscribe

» cd c:\sgk
» mke

K =

  1.0e+006 *

  Columns 1 through 7

    0.0667         0   -0.1000   -0.0667         0   -0.1000         0
         0    2.5000         0         0   -2.5000         0         0
   -0.1000         0    0.2000    0.1000         0    0.1000         0
   -0.0667         0    0.1000    1.4012    1.3147    0.0603   -1.3345
         0   -2.5000         0    1.3147    3.8345    0.0397   -1.3147
   -0.1000         0    0.1000    0.0603    0.0397    0.3590    0.0397
         0         0         0   -1.3345   -1.3147    0.0397    1.3345
         0         0         0   -1.3147   -1.3345   -0.0397    1.3147

  Column 8

         0
         0
         0
   -1.3147
   -1.3345
   -0.0397
    1.3147
    1.3345


Knn =

  1.0e+006 *

    1.4012    1.3147    0.0603
    1.3147    3.8345    0.0397
    0.0603    0.0397    0.3590


Kzz =

  1.0e+006 *

    0.0667         0   -0.1000         0         0
         0    2.5000         0         0         0
   -0.1000         0    0.2000         0         0
         0         0         0    1.3345    1.3147
         0         0         0    1.3147    1.3345


Kzn =

  1.0e+006 *

   -0.0667         0   -0.1000
         0   -2.5000         0
    0.1000         0    0.1000
   -1.3345   -1.3147    0.0397
   -1.3147   -1.3345   -0.0397


F =

   15.0000
         0
   -7.5000
   27.5139
  -12.5139
   -2.5000
    7.4942
   -7.4942


invKnn =

  1.0e-005 *

    0.1059   -0.0362   -0.0138
   -0.0362    0.0385    0.0018
   -0.0138    0.0018    0.2807
```

```
Un =

  1.0e-004 *

    0.3400
   -0.1481
   -0.1103


R =

  -16.1646
   37.0155
    9.7968
  -33.8435
  -17.0074


NS1 =

   37.0155
   16.1646
    9.7968
  -37.0155
   13.8354
   -6.3065


NS2 =

   35.9625
   16.3933
    6.3065
  -35.9625
   11.9067

»
```